Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.
2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Lineare Algebra / Analytische Geometrie*

Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten.
Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. Eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. Ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Zur Beschreibung und Vorhersage von Förderungsvorgängen von Rohstoffen wird häufig Bezug auf die sogenannte HUBBERT-Kurve genommen. Aufgrund dieses Modells wird für einen konkreten Förderungsvorgang angenommen, dass er sich durch die Funktion f mit $f(t) = 100 \cdot \frac{e^{-0,1 \cdot t}}{\left(1 + e^{-0,1 \cdot t}\right)^2}$ beschreiben lässt. Dabei gibt t den Zeitpunkt in Jahren und f(t) die zugehörige Förderungsrate in $\frac{\text{Einheiten}}{\text{Jahr}}$ an. Für den Zeitraum der letzten 25 Jahre, also für $-25 \le t \le 0$, wird mit diesem Modell der Förderungsvorgang angemessen beschrieben.

a) In dem Koordinatensystem der Anlage sind drei Graphen dargestellt.
Entscheiden Sie begründet, welcher der Graphen zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt t_1, an dem die Änderung der Förderungsrate maximal war. (Zur Kontrolle: $t_1 \approx -13,2$)
Bestimmen Sie näherungsweise die Gesamtförderung innerhalb der 25 Jahre vor dem Zeitpunkt $t = 0$.

b) Eine weitere Kurve mit vergleichbarem Verlauf ist die sogenannte GAUß-Kurve. Diese Modellierung erfolgt durch die Funktion g mit $g(t) = 27,5 \cdot e^{-0,0017 \cdot (t-4,15)^2}$.
Bestimmen Sie nach beiden Modellierungen (HUBBERT-Kurve; GAUß-Kurve) die Förderungsrate und die Änderung der Förderungsrate zu dem Zeitpunkt t_1 aus Aufgabenteil a).
Bestimmen Sie die größte Abweichung der Förderungsraten nach den beiden Modellierungen innerhalb der letzten 25 Jahre, also für $-25 \le t \le 0$.

c) Vergleichen Sie die beiden Modellierungen für den Zeitraum mit $-25 \le t \le 25$ aufgrund folgender Aspekte und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Hinblick auf einen Förderungsvorgang:
- Gesamtförderung zwischen den Zeitpunkten $t = -25$ und $t = 0$,
- Gesamtförderung zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 25$,
- Zeitpunkt der maximalen Förderungsrate und deren Größe.

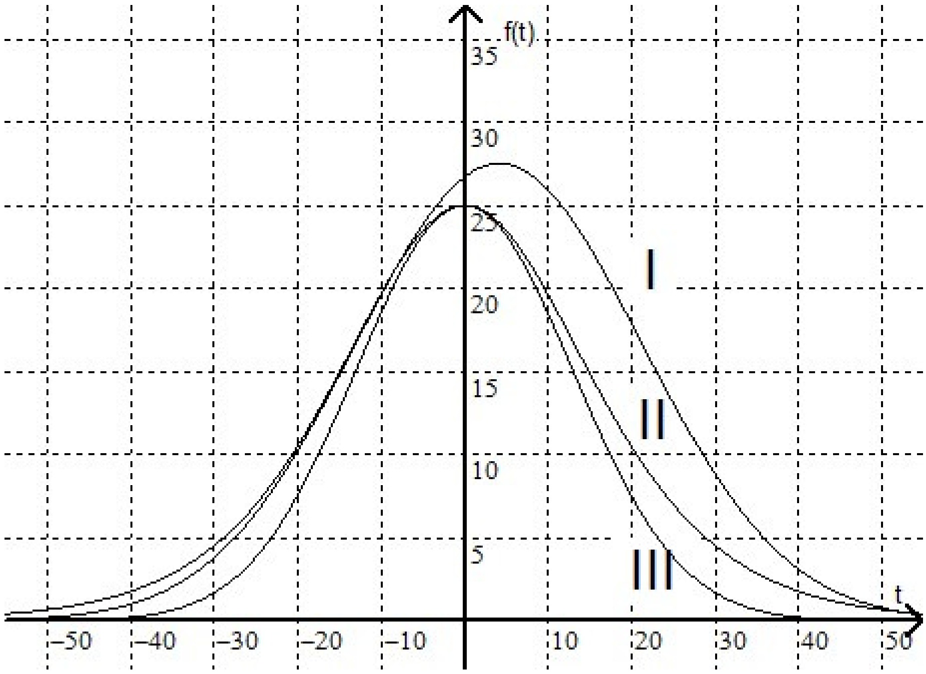
d) Unabhängig von der Anwendung soll die Funktion h mit $h(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2}$ betrachtet werden.
Zeigen Sie, dass die Funktion H mit $H(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ eine Stammfunktion von h ist.
Für $b > 0$ ist durch die Punkte $A(b \mid 0)$, $B(b \mid h(b))$, $C(-b \mid h(-b))$ und $D(-b \mid 0)$ ein Rechteck gegeben, dessen Eckpunkte B und C auf dem Graphen von h liegen. Die Strecke $\overline{BC}$ und der Graph von h schließen eine Fläche ein.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung des Flächeninhalts dieser Fläche und berechnen Sie b so, dass diese Fläche den Flächeninhalt 0,5 FE hat.

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage

Koordinatensystem mit drei Graphen zu Teilaufgabe a)



Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Der Graph von f ist symmetrisch. Weisen Sie diese Symmetrie nach.
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
Untersuchen Sie, ob die Wendestellen im Bereich $0 \le x \le 6$ genau in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Extremstellen liegen.

b) Die Gerade g mit $g(x) = x$ besitzt mit dem Graphen von f gemeinsame Punkte, speziell den Ursprung $O(0\,|\,0)$. Bestimmen Sie denjenigen gemeinsamen Punkt im 1. Quadranten, der dem Ursprung am nächsten liegt, und weisen Sie nach, dass es sich bei diesem Punkt um einen Berührpunkt handelt.
Eine Parallele zur x-Achse schneidet die y-Achse im Punkt P und den Graphen von f im Intervall $[0;\pi]$ in den Punkten Q und R. Ein Beispiel für diesen Sachverhalt ist in der Anlage 1 dargestellt.
Bestimmen Sie für die Gerade zu $y = 1$ das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{PR} : \overline{PQ}$.
Ermitteln Sie einen Zahlenwert a, so dass für die Gerade zu $y = a$ gilt: $\overline{PR} : \overline{PQ} = 2$.

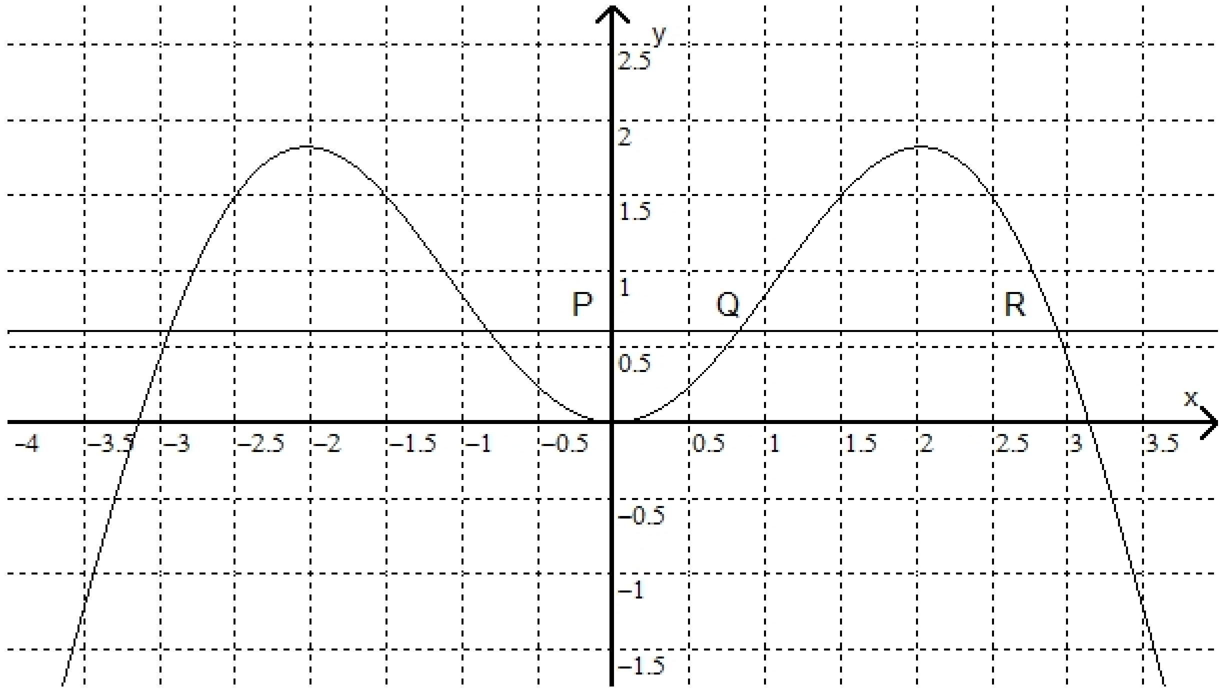
c) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$ eine Stammfunktion von f ist.
Der Graph von f schließt mit der positiven x-Achse viele Flächenstücke ein.
In der Anlage 2 sind das erste und das zweite Flächenstück markiert.
Bestimmen Sie den jeweiligen Inhalt dieser beiden Flächenstücke.
Bestimmen Sie diejenigen Nullstellen, die das n-te Flächenstück begrenzen ($n \in \mathbb{N}, n \ge 1$).
Für den Inhalt des n-ten Flächenstücks gilt: $A_n = \left|-n \cdot \pi \cdot \cos(n \cdot \pi) + (n-1) \cdot \pi \cdot \cos((n-1) \cdot \pi)\right|$.
Weisen Sie nach, dass sich der Inhalt des n-ten Flächenstücks als ganzzahliges Vielfaches von π darstellen lässt.

d) Die Funktion f ist eine Funktion der Schar f_k mit $f_k(x) = x \cdot \sin(k \cdot x)$, $k > 0$.
Ermitteln Sie, für welche Parameter k die Funktionen f_k im Intervall $[0;\pi]$ mehr als vier Nullstellen besitzen.
An die Graphen von f_k werden in dem jeweiligen Schnittpunkt mit der positiven x-Achse, der dem Ursprung am nächsten liegt, Tangenten gelegt.
Untersuchen Sie, ob es solche Tangenten gibt, die die y-Achse im Punkt $P(0\,|\,1)$ schneiden, und bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Parameter.

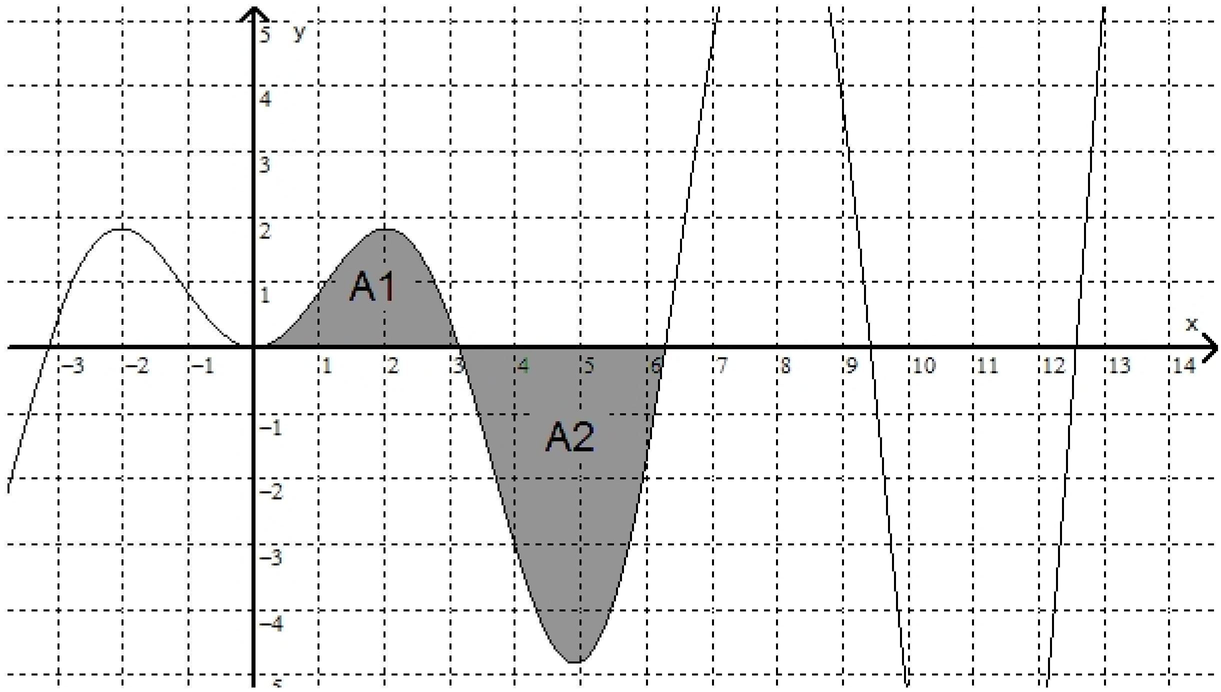
Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage 1 zu Aufgabenteil b)



Anlage 2 zu Aufgabenteil c)



Block 2A – Aufgabe 1

Ein wichtiger Aspekt von Flugreisen ist die Organisation des Gepäcktransports.
Bei der Aufgabe eines Gepäckstücks wird zunächst das Gewicht erfasst, dann läuft es durch eine mehrstufige Sicherheitskontrolle, schließlich wird es mit einem Aufkleber versehen, aus dem das vorgesehene Flugzeug und der Bestimmungsflughafen hervorgehen.

a) Die Zufallsgröße X gibt das Gewicht in kg an, sie soll als normalverteilt angesehen werden. Nach bisherigen Erfahrungen geht man von einem Erwartungswert $\mu = 14{,}5\text{ kg}$ und einer Standardabweichung $\sigma = 5{,}4\text{ kg}$ aus.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gewicht eines Gepäckstücks 20 kg überschreitet.
Bestimmen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $80\,\%$ das Gewicht eines Gepäckstücks innerhalb dieses Intervalls liegt.

b) Aufgrund von unlesbaren oder verloren gegangenen Aufklebern kommt es dazu, dass Gepäckstücke nicht zum vorgesehenen Flugzeug gelangen. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke wird als konstant angesehen und beträgt $1\,\%$.
Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der fehlgeleiteten Gepäckstücke an.
Begründen Sie, warum die Zufallsgröße Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
Berechnen Sie für einen Flug mit 100 Gepäckstücken die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1: Alle 100 Gepäckstücke gelangen zum richtigen Flugzeug.

E_2: Mehr als zwei der 100 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.

Untersuchen Sie, um wie viel der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke durch Verbesserungsmaßnahmen mindestens gesenkt werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mehr als zwei von 100 Gepäckstücken werden fehlgeleitet“ im Vergleich zu dem oben für E_2 berechneten Wert höchstens halb so groß wird.

c) Bei der Sicherheitskontrolle durchläuft ein Gepäckstück bis zu drei Stationen:

Station 1: Automatische Durchleuchtung, eindeutiges Ergebnis bei $95\,\%$ der Kontrollen. Liegt kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück zur Station 2 weitergeleitet.

Station 2: Durchleuchtung mit Sichtung durch einen Mitarbeiter, eindeutiges Ergebnis bei $80\,\%$ dieser Kontrollen. Liegt kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück zur Station 3 weitergeleitet.

Station 3: Öffnung und Kontrolle durch einen Mitarbeiter.

Stellen Sie den Ablauf grafisch dar.
Für die Untersuchung entstehen an den jeweiligen Stationen folgende Kosten:

Station	1	2	3
Kosten je untersuchtem Gepäckstück in €	0,4	2	15

Bestimmen Sie die Kosten, die durchschnittlich für die Kontrolle eines Gepäckstücks angesetzt werden müssen.
Es wird ein neues Durchleuchtungsgerät für Station 1 angeboten, durch das sich die Kosten je untersuchtem Gepäckstück an dieser Station auf 0,50 € erhöhen würden.
Berechnen Sie, bei wie viel Prozent der Kontrollen dieses Gerät ein eindeutiges Ergebnis liefern muss, damit sich die durchschnittlichen Kosten für die Kontrolle eines Gepäckstücks nicht erhöhen. Setzen Sie hierbei voraus, dass sich die Erkennungsrate an Station 2 nicht ändert.
Erläutern Sie einen Grund, der gegen die Voraussetzung, dass sich die Erkennungsrate an Station 2 nicht ändert, sprechen könnte.

Block 2A – Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und $A(6\,|\,6\,|\,3)$ sowie die Ebene $E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{OA}$ durch die Ebene E_1 in zwei Teilstrecken geteilt wird.
Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Strecke $\overline{OA}$ mit der Ebene E_1. Entscheiden Sie, welcher der beiden Punkte O und A von S weiter entfernt liegt.

b) Die Ebenen E_1 und E_2 liegen punktsymmetrisch zum Punkt O zueinander.
Untersuchen Sie, ob die folgende Gleichung eine Gleichung der Ebene E_2 sein kann:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Block 2B – Aufgabe 1

Die Wetterentwicklung vor Ort ist über lange Zeit beobachtet worden. Dabei wurde modellhaft ausschließlich zwischen sonnigem Wetter (**s**), unbeständigem Wetter (**u**) und regnerischem Wetter (**r**) unterschieden. Statistischem Material kann entnommen werden, wie sich das gegenwärtige Wetter in den nächsten Tagen voraussichtlich entwickeln wird. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom gegenwärtigen Wetterzustand zum Wetterzustand am nächsten Tag sind in der oben stehenden, unvollständigen Übergangstabelle zusammengestellt. In „Wetter-Vektoren“ werden die Verteilungen der Wahrscheinlichkeiten für die drei Zustände (sonniges, unbeständiges und regnerisches Wetter) für einen Tag dargestellt.

		von		
		s	u	r
nach	s	0,5		
	u		0,5	0,3
	r	0,2	0,2	0,5

a) Ergänzen Sie die Übergangstabelle.
Zeichnen Sie einen entsprechenden Übergangsgraphen.
Erläutern Sie die Hauptdiagonale der Übergangstabelle im Sachzusammenhang.
Erläutern Sie die letzte Spalte der Übergangstabelle im Sachzusammenhang.

Für heute wurde folgende Verteilung der Wahrscheinlichkeiten vorhergesagt: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} s \\ u \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den „Wetter-Vektor“ für übermorgen und interpretieren Sie diesen bezüglich einer Wettervorhersage.

b) Die Wetterprognose für Samstag sagt voraus, dass alle drei Zustände gleichwahrscheinlich sind.
Berechnen Sie damit den „Wetter-Vektor“ für den folgenden Mittwoch.
Eine andere Prognose geht davon aus, dass am Samstag sonniges Wetter doppelt so wahrscheinlich ist wie unbeständiges und regnerisches Wetter. Die letzten beiden sind aber gleichwahrscheinlich. Berechnen Sie damit den „Wetter-Vektor“ für den folgenden Mittwoch.
Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
Berechnen Sie einen „Wetter-Vektor“ so, dass die Verteilung von Tag zu Tag gleich bleibt.

Für einen Tag ist für das Wetter folgende Verteilung $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix}$ vorhergesagt. Untersuchen Sie,

ob diese Verteilung durch Multiplikation eines „Wetter-Vektors“ mit der Übergangsmatrix entstanden sein kann.

c) Eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente Zahlen aus dem Intervall $[0;1]$ sind und in der jede Spaltensumme den Wert 1 hat, heißt „stochastische Matrix“.
Beweisen Sie den folgenden Satz:
Das Produkt einer beliebigen stochastischen 2×2-Matrix A mit einer beliebigen stochastischen 2×2-Matrix B ist wieder eine stochastische Matrix.

Block 2B – Aufgabe 2

a) Ein Fernsehsender strahlt täglich eine Abendsendung der Nachrichten aus. Bei der Auswertung einer großen Umfrage zu den Fernsehgewohnheiten wurden die Befragten vereinfachend in zwei Gruppen zusammengefasst, die der „Vielseher" und die der „Nicht-Vielseher".
Man erhielt unter anderem folgende Resultate:

- 30% der Befragten gehörten zu den „Vielsehern".
- Von den „Vielsehern" kannten 40% die Abendsendung.
- Die Abendsendung war 20% der insgesamt Befragten bekannt.

Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
Bestimmen Sie den Anteil der Befragten, die nicht zu den „Vielsehern" gehören und die Abendsendung kennen.
Bestimmen Sie den Anteil derjenigen unter den „Nicht-Vielsehern", die die Abendsendung kennen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Befragung mindestens eine Person die Abendsendung kennt, soll mehr als 99% betragen. Bestimmen Sie die Mindestanzahl an Personen, die dazu befragt werden müssen.

b) Der Fernsehsender strahlt auch eine Spätausgabe der Nachrichten aus. Bei einer Umfrage wurden 1000 Personen befragt, welches für sie die wichtigste Informationsquelle des Tages ist. Von diesen gaben dabei 357 die Abendsendung und 42 die Spätausgabe an, 601 Personen gaben eine andere Informationsquelle an.
Bestimmen Sie jeweils ein Vertrauensintervall ($\gamma = 90\%$) für den Anteil der Personen, die

- die Abendsendung als wichtigste Informationsquelle angeben würden,
- die Spätausgabe als wichtigste Informationsquelle angeben würden,
- entweder die Abendsendung oder die Spätausgabe als wichtigste Informationsquelle angeben würden.

Vergleichen Sie das zuletzt bestimmte Vertrauensintervall mit dem Intervall, das sich durch Addition der jeweiligen Intervallgrenzen aus den beiden zuvor bestimmten einzelnen Vertrauensintervallen ergibt.
Beurteilen Sie auf der Basis einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% die Aussage des Senders: „Für über 43% der Bevölkerung sind unsere Abendsendung oder die Spätausgabe die wichtigste Informationsquelle des Tages."

Material

Anlage

Umgebungen des Erwartungswertes bei Binomialverteilungen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\sigma > 3$)						
Radius der Umgebung	$1 \cdot \sigma$	$1{,}64 \cdot \sigma$	$1{,}96 \cdot \sigma$	$2 \cdot \sigma$	$2{,}58 \cdot \sigma$	$3 \cdot \sigma$
Wahrscheinlichkeit	68%	90%	95%	$95{,}5\%$	99%	$99{,}7\%$