Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.
2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Lineare Algebra / Analytische Geometrie*

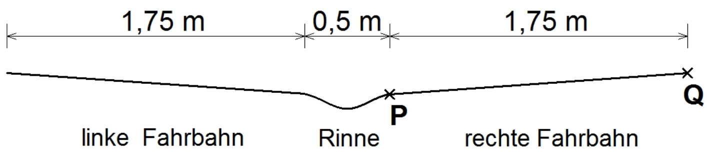
Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten.
Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. Eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. Ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

In einem Neubaugebiet wird eine Straße geplant. Die Straße soll in der Mitte eine Rinne besitzen, deren Querschnitt für $-0,25 \le x \le 0,25$ durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10} \cdot \left(1 + e^{-30x^2}\right)$ beschrieben werden kann. Dabei werden x und f(x) in Metern angegeben.



Zwischen den Rändern der Rinne und dem Straßenrand befinden sich die zur Mitte geneigten ebenen Fahrbahnen. Der gesamte Querschnitt der Straße soll achsensymmetrisch sein.

a) Die Punkte $P(0,25 \mid f(0,25))$ und $Q(2 \mid 0)$ begrenzen den Querschnitt der rechten Fahrbahn.
Zeichnen Sie die Punkte P und Q in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie den Höhenunterschied zwischen Straßenmitte und Straßenrand.
Berechnen Sie die Fahrbahnbreite unter Berücksichtigung ihrer Neigung, also den Abstand der Punkte P und Q.
Zeigen Sie, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Für die Gerade g_1, die zwischen den Punkten P und Q den Querschnitt der rechten Fahrbahn beschreibt, gilt näherungsweise die Gleichung $g_1(x) = 0,0659 \cdot x - 0,1318$.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g_2 für die linke Seite der Fahrbahn.

b) Für das Fassungsvermögen der Rinne ist ihre Querschnittsfläche maßgeblich. Diese Fläche ist im Koordinatensystem der Anlage markiert.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Bei einem Starkregen steigt das Wasser auf eine Höhe von 0,16 m über den Grund der Rinne.
Bestimmen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Wassers.

c) Weisen Sie nach, dass für die Ableitungsfunktion von f gilt: $f'(x) = 6x \cdot e^{-30x^2}$.
Bestimmen Sie die maximale Steigung des Rinnenquerschnitts.
Aus Sicherheitsgründen soll an keiner Stelle des Rinnenquerschnitts der Winkel zur Horizontalen größer als $26°$ sein.
Untersuchen Sie, ob diese Vorschrift eingehalten wird.

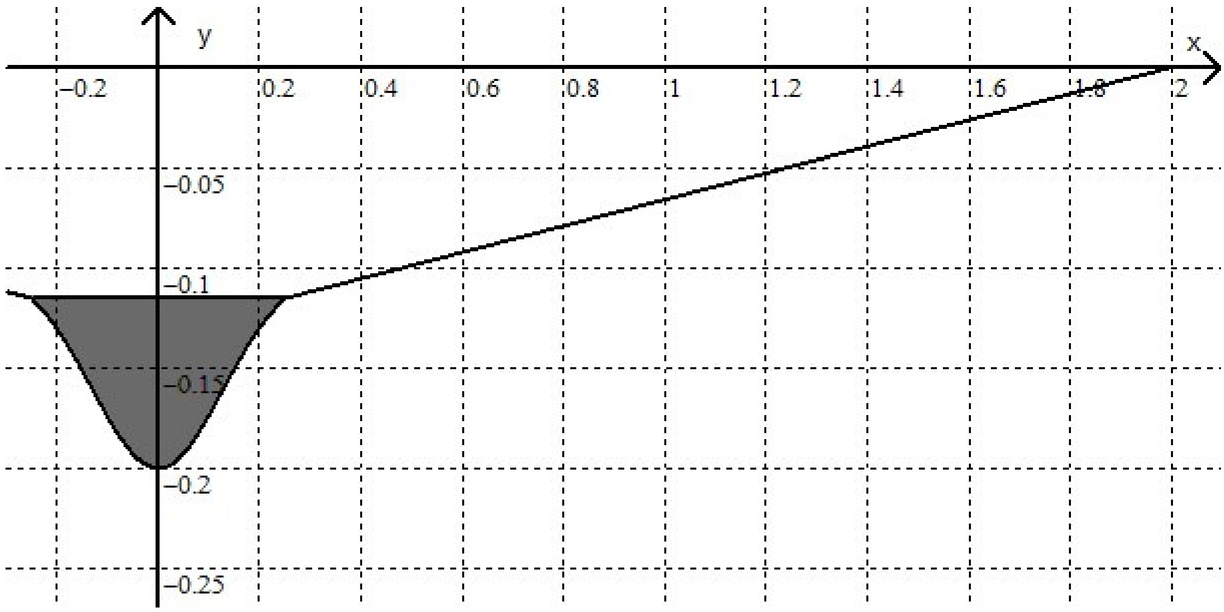
d) Zeigen Sie, dass die rechte Fahrbahn mit der Rinne einen Knick bildet, das heißt, dass die Gerade g_1 keine Tangente an den Graphen von f ist.
Es gibt aber Tangenten an den Graphen von f, die durch den Punkt $Q(2 \mid 0)$ verlaufen.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung einer Gleichung einer solchen Tangente. Die Gleichung einer Tangente braucht dabei nicht explizit bestimmt zu werden.

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage

Koordinatensystem mit unterschiedlicher Achsenskalierung zu den Teilaufgaben a) und b)



Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{6}{5}x^2$.

a) Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch ist.
Bestimmen Sie die drei Extrempunkte des Graphen von f.
Begründen Sie, dass der Graph von f zwei Wendepunkte besitzen muss.
Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion 4. Grades nicht mehr als zwei Wendestellen besitzen kann.

b) Der Graph von f besitzt seine Wendepunkte an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$.
Die Parallele zur x-Achse durch die beiden Wendepunkte schließt mit dem Graphen von f drei Flächenstücke ein. Diese sind in der Anlage 1 markiert.
Bestimmen Sie deren Inhalte.

c) Bestimmen Sie die 1. Ableitung f' zu der Funktion f.
Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in den Wendepunkten.
Untersuchen Sie, welche Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ der Graph von f als Steigung besitzt.
Entscheiden Sie, ob es Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ gibt, die mehr als zweimal als Steigung des Graphen von f auftreten. Bestimmen Sie gegebenenfalls einen entsprechenden Zahlbereich.

d) Gegeben ist die Funktionenschar g_k mit $g_k(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{k}{2} \cdot x^2$; $k \in \mathbb{R}$.
Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass gilt:

- $g_k'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - k \cdot x$
- $g_k''(x) = x^2 - 4x - k$

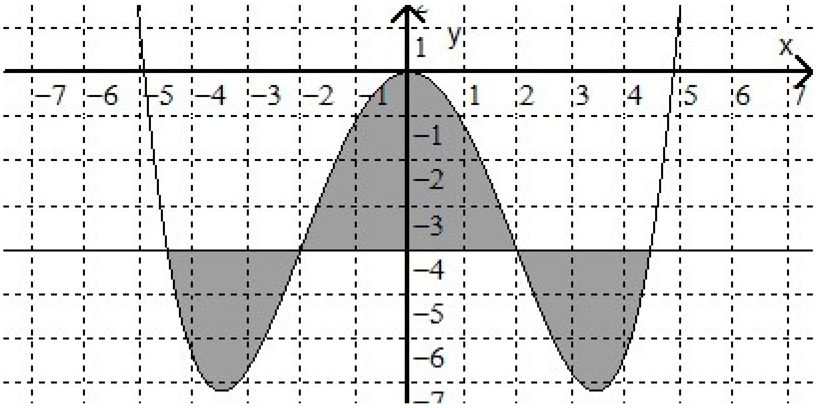
Weisen Sie nach, dass für $k = 0$ der Graph von g_0 an der Stelle $x = 0$ einen Sattelpunkt besitzt.
In der Anlage 2 ist ein Graph der Schar zu sehen, der an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt besitzt.
Bestimmen Sie den dazugehörigen Parameter k.
Nullstellen der 2. Ableitung g_k'' lassen sich mit folgender Darstellung ermitteln:
$x = 2 + \sqrt{k+4}$ oder $x = 2 - \sqrt{k+4}$.
Untersuchen Sie, für welche Parameter k die Funktion g_k keine Wendestellen besitzt.

Fortsetzung Aufgabe 1B

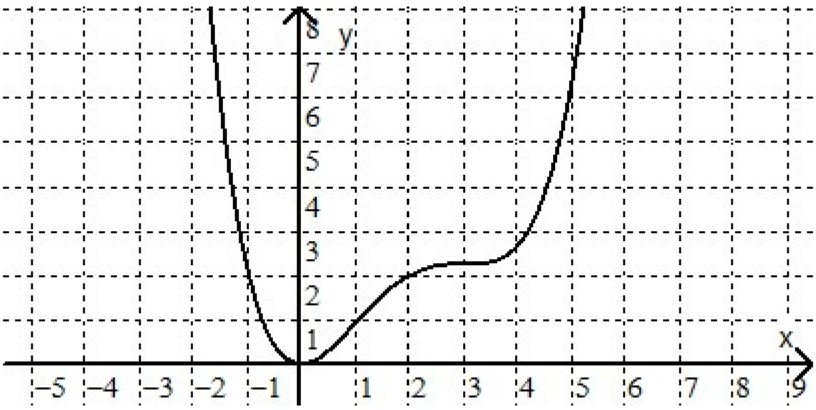
Material

Anlage

Anlage 1 zu Teilaufgabe b)



Anlage 2 zu Teilaufgabe d)



Block 2A – Aufgabe 1

Bei Bluttransfusionen ist es lebenswichtig, dass auf die Blutgruppe (0, A, B oder AB) und den Rhesusfaktor positiv **(+)** oder negativ **(-)** geachtet wird. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Blutgruppen mit den Rhesusfaktoren sind sehr unterschiedlich. Für Deutschland gilt näherungsweise die folgende Verteilung:

Blutgruppe mit Rhesusfaktor	0**(+)**	0**(-)**	A**(+)**	A**(-)**	B**(+)**	B**(-)**	AB**(+)**	AB**(-)**
Wahrscheinlichkeiten in %	36	5	37	6	9	2	4	1

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person die Blutgruppe A besitzt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit der Blutgruppe A den Rhesusfaktor **(+)** besitzt.
Ein Blutspender und ein Empfänger besitzen beide die Blutgruppe A. Komplikationen sind nur zu erwarten, wenn der Spender den Rhesusfaktor **(+)** und der Empfänger den Rhesusfaktor **(-)** hat.
Zeichnen Sie hierzu ein geeignetes Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keine Komplikation auftritt.

b) Eine Blutbank möchte durch eine Blutspendenaktion Proben der für Empfänger besonders geeigneten, aber seltenen Blutgruppe 0 mit Rhesusfaktor **(-)** erhalten. Dazu werden 100 Proben gesammelt.
Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen die Anzahl der Proben mit 0**(-)** als binomialverteilt angenommen werden kann.
Berechnen Sie unter der Annahme einer Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeiten dafür,
- dass man genau fünf Proben 0**(-)** erhält.
- dass mindestens eine Probe 0**(-)** ist.

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Probe 0**(-)** zu erhalten, soll größer als $99\,\%$ sein.
Ermitteln Sie die dazu notwendige Mindestanzahl der Proben.

c) In einer Lieferung von 2000 niederländischen, zufällig ausgewählten Blutproben finden sich 150 Proben der Blutgruppe 0 mit Rhesusfaktor **(-)**.
Bestimmen Sie das Vertrauensintervall der Stichprobe ($\gamma = 95\,\%$) für den Anteil dieser Blutproben.
Entscheiden Sie, ob man aufgrund dieses Vertrauensintervalls davon ausgehen kann, dass es in den Niederlanden einen anderen Anteil der Blutgruppe 0 mit Rhesusfaktor **(-)** gibt als in Deutschland.
Untersuchen Sie, ob sich die gleiche Frage bei einer Stichprobe von 200 Proben mit 15-mal 0**(-)** genauso entscheiden lässt.

Material

Anlage

Umgebungen des Erwartungswertes bei Binomialverteilungen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\sigma > 3$)						
Radius der Umgebung	$1 \cdot \sigma$	$1{,}64 \cdot \sigma$	$1{,}96 \cdot \sigma$	$2 \cdot \sigma$	$2{,}58 \cdot \sigma$	$3 \cdot \sigma$
Wahrscheinlichkeit	$68\,\%$	$90\,\%$	$95\,\%$	$95{,}5\,\%$	$99\,\%$	$99{,}7\,\%$

Block 2A – Aufgabe 2

Die Punkte $A(3\,|\,-3\,|\,-4)$, $B(3\,|\,3\,|\,-4)$, $C(-3\,|\,3\,|\,-4)$ und $S(0\,|\,0\,|\,2)$ sind Eckpunkte der Pyramide ABCDS mit der quadratischen Grundfläche ABCD.
In der Anlage ist ein Schrägbild der Pyramide zu sehen.

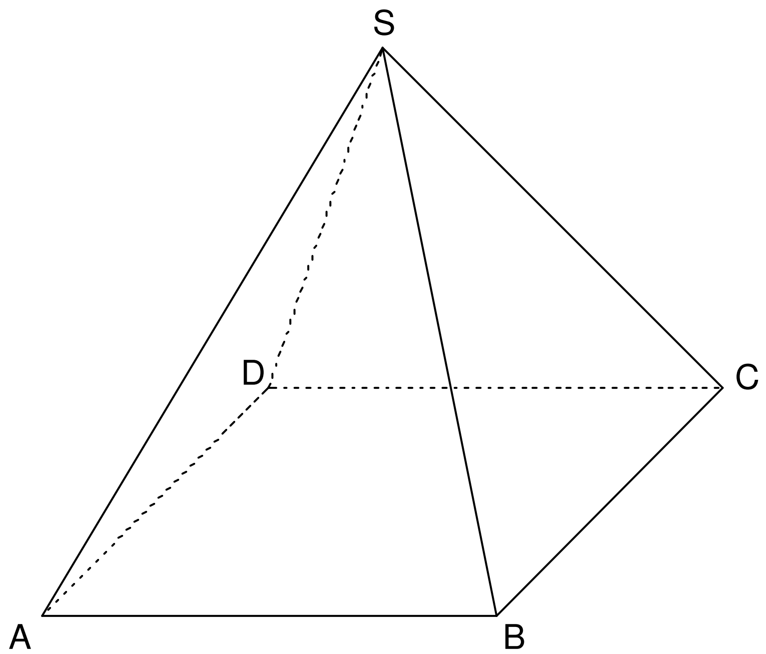
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche ABCD.
Zeichnen Sie ein Koordinatensystem in das Schrägbild der Anlage, so dass sich dieses Koordinatensystem im Einklang mit den Koordinaten der vorgegebenen Punkte befindet.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(-0{,}5\,|\,2{,}5\,|\,-3)$ auf einer der Seitenflächen der Pyramide liegt.

Material

Anlage

Schrägbild der Pyramide ABCDS



Block 2B – Aufgabe 1

Ein Hersteller von Spielzeugeisenbahnen bietet ein Starterset (E_1) und ein Superset (E_2) als Endprodukte an.
Aus den Ausgangsprodukten „Schwelle“ (A_1), „Schiene“ (A_2) und „Schranke“ (A_3) sollen über die Zwischenprodukte „gerades Gleis“ (Z_1), „gebogenes Gleis“ (Z_2) und „Schrankengleis“ (Z_3) die beiden Packungen zusammengestellt werden.
Die nachstehenden Tabellen geben an, wie viel Stück von den Ausgangsprodukten A_1, A_2 und A_3 zur Produktion der drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 beziehungsweise wie viel Stück von den Zwischenprodukten zur Produktion der Endprodukte E_1 und E_2 benötigt werden.

Vom Ausgangs- zum Zwischenprodukt

	Z_1	Z_2	Z_3
A_1	3	4	6
A_2	2	2	4
A_3	0	0	2

Vom Zwischen- zum Endprodukt

	E_1	E_2
Z_1	6	8
Z_2	8	8
Z_3	0	1

a) Erstellen Sie einen Graphen, der die Materialverflechtungen bei diesem Produktionsprozess beschreibt.
Berechnen Sie, wie viele Ausgangsprodukte benötigt werden, damit eine Bestellung über 50 Startersets und 10 Supersets bearbeitet werden kann.
(Kontrollergebnis: 3120 Stück von A_1, 1760 Stück von A_2 und 20 Stück von A_3)

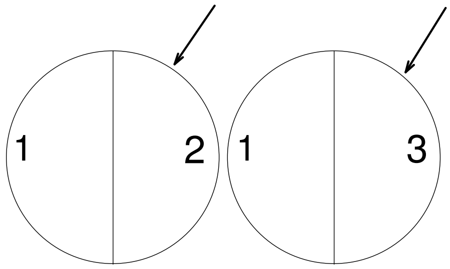
b) Dem Hersteller liegt eine weitere Bestellung über 500 gerade Gleise, 350 gebogene Gleise und 50 Schrankengleise vor.
Weisen Sie nach, dass diese Stückzahlen zusätzlich zu der Bestellung aus Aufgabenteil a) nicht geliefert werden können, wenn insgesamt 5996 Schwellen, 4000 Schienen und 140 Schranken im Lager vorhanden sind.
Zu einem späteren Zeitpunkt befinden sich am Lager noch 2964 Schwellen, 2240 Schienen und 120 Schranken. Es geht eine Bestellung über gleich viele gerade Gleise, gebogene Gleise und Schrankengleise ein.
Berechnen Sie, wie viele der Zwischenprodukte maximal geliefert werden können.

c) Für den Auftrag eines Händlers über Zwischenprodukte wurden 1635 Schwellen, 990 Schienen und 120 Schranken bereitgestellt. Leider sind die Bestellunterlagen verloren gegangen.
Bestimmen Sie, wie die Bestellung an Zwischenprodukten lautete.
Die Produktionsbedingungen haben sich geändert. Sie werden jetzt durch die nebenstehende Tabelle beschrieben.
Jemand behauptet: „Für eine Bestellung der Zwischenprodukte, bei der doppelt so viele gerade wie gebogene Gleise bestellt wurden, wurden die oben genannten Stückzahlen von 1635 Schwellen, 990 Schienen und 120 Schranken benötigt.“
Untersuchen Sie, ob es ein a gibt, so dass diese Behauptung zutrifft.

	Z_1	Z_2	Z_3
A_1	3	a	6
A_2	2	2	4
A_3	0	0	2

Block 2B – Aufgabe 2

An einem Glücksspielautomaten werden zwei Glücksräder gedreht. Die Ergebnisse, die sich beim Drehen der beiden Glücksräder ergeben, werden durch die Pfeile angezeigt und sind gleich wahrscheinlich und unabhängig.



Glücksrad A Glücksrad B

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden Zahlen.
Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung dieser Zufallsgröße.
Der Spielplan für den Automaten sieht folgendermaßen aus:

Einsatz: 1 € pro Spiel

Gewinnplan:

	Ereignis	Auszahlung
Hauptgewinn	Die Summe der Zahlen ist 2.	h €
Trostpreis	Die Summe der Zahlen ist 5.	1 €
verloren	sonst	0 €

Bestimmen Sie die Höhe h des Hauptgewinns so, dass das Spiel fair ist.

b) Ein anderes Glücksrad hat zwei unterschiedlich große Felder mit den Ergebnissen „1“ und „2“. Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „1“ ist neunmal so groß wie die für das Ergebnis „2“.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei vier Drehungen dieses Glücksrades mindestens einmal die „2“ zu erhalten.
Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Drehungen, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, mindestens einmal die „2“ zu erhalten, über $50\,\%$ beträgt.