Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.
2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Lineare Algebra / Analytische Geometrie*

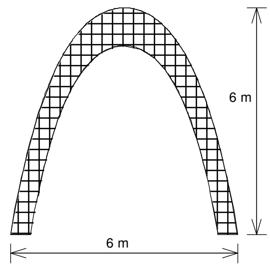
Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten.
Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. Eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. Ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Das Bild rechts zeigt den Querschnitt des Eingangs des geplanten Science-Centers MATHERAMA. Die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right) + 6$ beschreibt zwischen den Nullstellen den inneren Begrenzungsbogen. Hierbei werden x und $f(x)$ in Metern angegeben. Der Boden entspricht der x-Achse. In der Anlage ist der Graph der Funktion f zu sehen.



a) Zeigen Sie, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Untersuchen Sie, ob die Breite und die Höhe des inneren Begrenzungsbogens ungefähr gleich groß sind.
Der äußere Begrenzungsbogen hat eine Breite und eine Höhe von 6 m. Für die Beschreibung des äußeren Begrenzungsbogens soll die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ verwendet werden.
Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion g für den äußeren Begrenzungsbogen.
(Zur Kontrolle: $g(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^2 + 6$)
Skizzieren Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Anlage.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.
Der Eingangsbogen soll mehrere Kriterien erfüllen:
- Die Steigung des inneren Begrenzungsbogens soll am Boden kleiner als 6 sein.
- Der senkrecht gemessene Höhenunterschied zwischen innerem und äußerem Begrenzungsbogen darf an keiner Stelle weniger als 0,8 m betragen.
- Der Inhalt der Querschnittsfläche zwischen innerem und äußerem Begrenzungsbogen soll den Wert von 6 m^2 nicht unterschreiten.

Untersuchen Sie, ob diese Bedingungen jeweils eingehalten werden.

c) Anlässlich einer Veranstaltung ist eine Laserschau geplant.
Ein schwenkbarer Laser befindet sich im Punkt $A(4\,|\,0)$. Der Leuchtfleck des Laserstrahls wandert auf dem äußeren Begrenzungsbogen nach oben.
Bestimmen Sie den Punkt auf dem durch die Funktion g beschriebenen äußeren Begrenzungsbogen, in dem der Laserstrahl den Bogen gerade noch streift.
Bestimmen Sie, unter welchem Winkel gegen die Horizontale der Laser dann gerichtet ist.
Ein weiterer Laser befindet sich im Koordinatenursprung. Der Leuchtfleck des Laserstrahls wandert auf dem inneren Begrenzungsbogen.
Bestimmen Sie die drei Punkte, in denen der Laserstrahl senkrecht auf den durch die Funktion f beschriebenen inneren Begrenzungsbogen trifft. Ohne Nachweis können Sie verwenden: Wenn für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden die Beziehung gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$, dann stehen die zugehörigen Geraden senkrecht aufeinander.

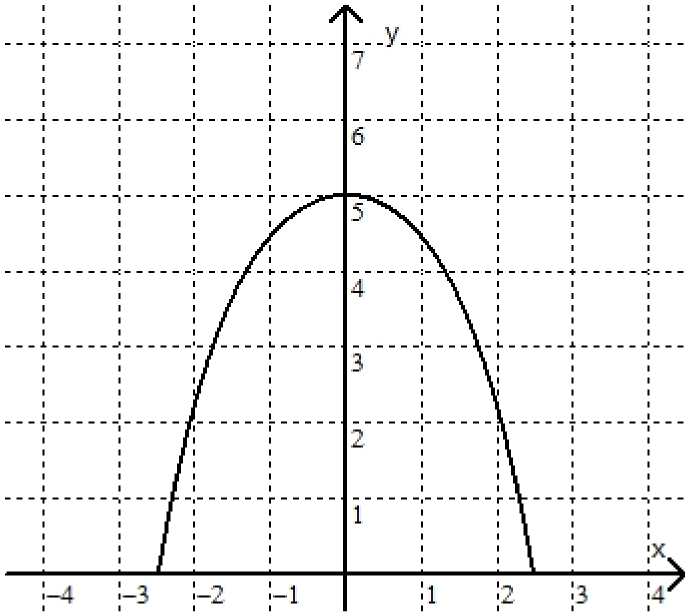
d) Der Laser wird auf der y-Achse auf die Höhe 4,5 m gehoben.
Untersuchen Sie, ob es weiterhin drei Punkte gibt, in denen der Laserstrahl senkrecht auf den inneren Begrenzungsbogen trifft.
Es gibt eine Höhe h des Lasers, ab der es nur noch einen Punkt gibt, in dem der Laserstrahl senkrecht auf den inneren Begrenzungsbogen trifft.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg um diese Höhe zu bestimmen.

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage

Koordinatensystem mit Graph von f zu Teilaufgabe a)



Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Graphen von f sowie dessen Extrempunkte im Bereich $0\le x\le 4$.
Zeigen Sie, dass der Graph symmetrisch zum Ursprung ist.
Die Geraden zu $y=\frac{1}{4}x+1$ und $y=\frac{1}{4}x-1$ bilden die Grenzen eines Streifens im Koordinatensystem.
Begründen Sie, dass sich kein Punkt des Graphen von f außerhalb dieses Streifens befindet.

b) Der Graph zu f und die Gerade h mit $h(x)=\frac{1}{4}x+1$ schließen Flächenstücke ein, von denen eines in der Anlage markiert ist.
Zeigen Sie, dass der Graph zu f und die Gerade h an den Stellen $x=-3$ und $x=1$ gemeinsame Punkte besitzen.
Bestimmen Sie algebraisch den Inhalt A des markierten Flächenstücks.
(Zur Kontrolle: $A=4$)
Dieses Flächenstück wird durch die x-Achse geteilt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte.

c) Ohne Nachweis können Sie im Weiteren verwenden:
$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right);\ f''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an den Stellen $x=0$ und $x=2$.
Zeigen Sie: Alle Wendepunkte des Graphen liegen auf einer Geraden g.
Untersuchen Sie die Gültigkeit folgender Aussage: Wenn man zwei beliebige Wendetangenten betrachtet, so sind sie entweder parallel zueinander oder sie schneiden sich in einem Winkel, dessen Größe dann unabhängig von der Wahl der Tangenten ist.

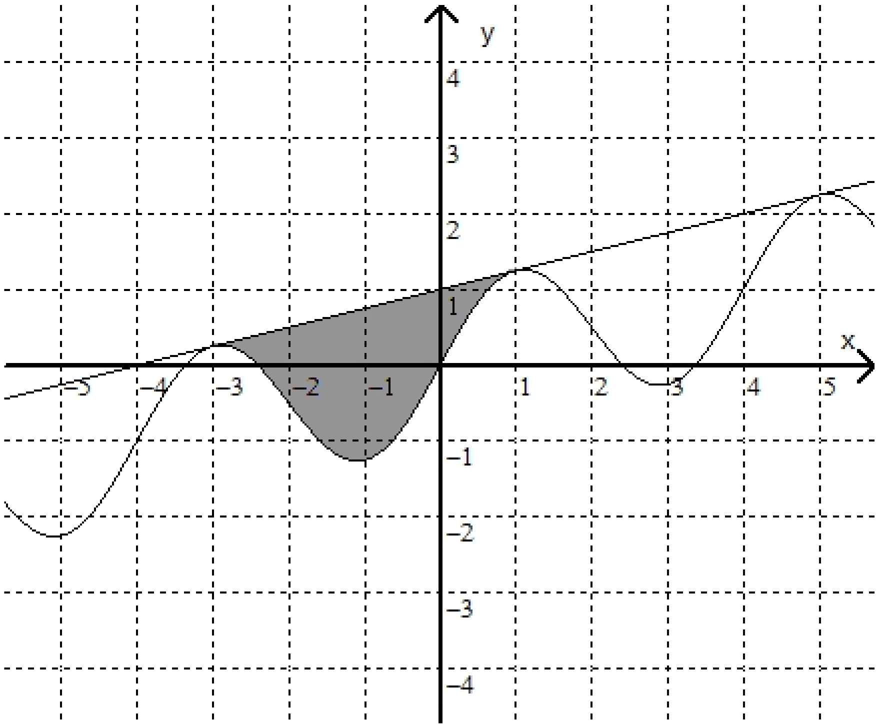
d) Die Funktion k ist bestimmt durch $k(x)=f(x+1)+2$.
Skizzieren Sie den Graphen von k in das Koordinatensystem der Anlage.
Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von f entsteht.
Ermitteln Sie je einen Wert für a und b mit $a\neq 0$ so, dass der Graph der Funktion $k_{a,b}$ mit $k_{a,b}(x)=f(x+a)+b$ identisch mit dem Graphen von f ist.
Erläutern Sie, dass es unendlich viele Wertepaare $(a\,|\,b)$ gibt, die diese Bedingung erfüllen, und bestimmen Sie diese Wertepaare.

Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage

Koordinatensystem zu den Teilaufgaben b) und d)



Block 2A – Aufgabe 1

a) Es sei X eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 40$ und $\sigma = 4{,}90$.
Berechnen Sie $P(35{,}1 \le X \le 44{,}9)$.
Bestimmen Sie das Intervall $I_1 = [40 - a; 40 + a]$ so, dass gilt: $P(40 - a \le X \le 40 + a) = 0{,}80$.
Bestimmen Sie ein anderes Intervall $I_2 = [b; c]$ so, dass ebenfalls gilt: $P(b \le X \le c) = 0{,}80$.

b) Als Modell für die Anzahl der Personen in einer Stichprobe, die in Deutschland im Jahr 2011 Steuern hinterziehen, wird eine Binomialverteilung angenommen.
Erläutern Sie im Sachkontext, welche Voraussetzungen für diese Annahme erfüllt sein müssen.
Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person in Deutschland Steuern hinterzieht, 40 % beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Personen genau 34 Personen Steuern hinterziehen.
Erläutern Sie den folgenden Term im Sachkontext:
$$\binom{100}{34} \cdot 0{,}40^{34} \cdot 0{,}60^{66} + \ldots + \binom{100}{d} \cdot 0{,}40^{d} \cdot 0{,}60^{100-d}, \ d > 34.$$
Bestimmen Sie d so, dass der Term ungefähr den Wert 0,80 annimmt.

c) Weil bei einer direkten Befragung zur Steuerhinterziehung viele Befragte nicht die Wahrheit sagen, wurde eine Methode entwickelt, um den Anteil der Steuerhinterzieher zuverlässiger zu schätzen. Diese Methode soll den Befragten die Angst nehmen, als Steuerhinterzieher ertappt zu werden. Dazu soll aus der Antwort eines einzelnen Befragten nicht auf dessen Ehrlichkeit bei seiner Steuererklärung zurückgeschlossen werden können, um möglichst ehrliche Antworten zu erhalten. Jeder Befragte führt zuerst einen Zufallsversuch mit zwei möglichen Ausgängen und ihm bekannten Wahrscheinlichkeiten durch. Der Ausgang des Zufallsversuchs, den nur der Befragte kennt, entscheidet darüber, welche der beiden folgenden Fragen er beantwortet:

F1	F2
„Ist es richtig, dass Sie schon einmal absichtlich eine falsche Angabe in Ihrer Steuererklärung gemacht haben?“	„Ist es richtig, dass Sie noch nie absichtlich eine falsche Angabe in Ihrer Steuererklärung gemacht haben?“

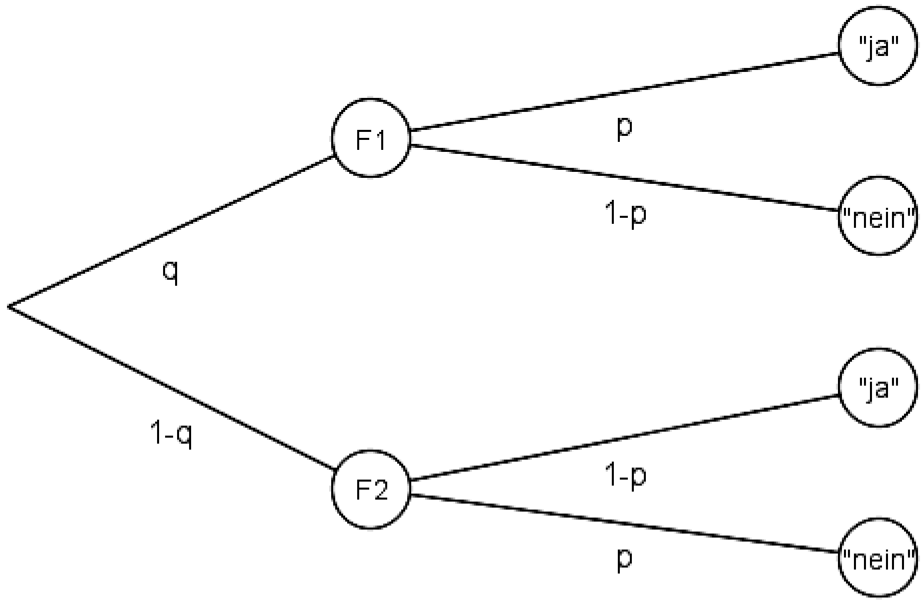
Begründen Sie, dass das Baumdiagramm in der Anlage die Methode angemessen darstellt, und erläutern Sie die vorkommenden Parameter im Sachkontext.
Zeigen Sie ausgehend vom Baumdiagramm, dass der folgende Term einen Schätzwert für p liefert, sofern h der Anteil der „ja“-Antworten in einer Stichprobe ist: $\frac{h + q - 1}{2q - 1}$.
In einer konkreten Durchführung dieser Methode werden 600 Personen befragt, und es wird ein Zufallsversuch mit $q = \frac{2}{3}$ eingesetzt. 288 Personen antworten mit „ja“.
Berechnen Sie damit einen Schätzwert für p.
Beurteilen Sie im Sachkontext, ob Zufallsversuche mit den Werten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ beziehungsweise 1 für q geeignet sind.

Fortsetzung Block 2A – Aufgabe 1

Material

Anlage

Baumdiagramm zu Teilaufgabe c)



Block 2A – Aufgabe 2

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Gerade g in der Ebene E_1 liegt.
Erläutern Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem.

b) Die Ebenen E_2 und E_3 besitzen beide mit der Ebene E_1 die Gerade g als Schnittgerade.
Die Ebene E_2 verläuft durch den Punkt $A(-9 \mid -4 \mid a)$.
Bestimmen Sie die Koordinate a so, dass die Ebene E_2 parallel zur xy-Ebene verläuft.
Die Ebene E_3 verläuft durch den Punkt $B(5 \mid 5 \mid b)$, $b \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage für jedes $b \in \mathbb{R}$ gültig ist.
Jede Ebene E_3 enthält auch die z-Achse.

Block 2B – Aufgabe 1

Die jährliche Entwicklung einer Vogelpopulation auf einer abgelegenen Insel ist durch die nebenstehende Tabelle gegeben.
Dabei steht A für „Altvögel“, E für „Eier“ und J für „Jungvögel“.
Zu Beginn der Beobachtung sind 90 Altvögel, 90 Eier und 18 Jungvögel vorhanden.

nach \ von	A	E	J
A	0,6	0	0,5
E	2	0	0
J	0	0,4	0

a) Skizzieren Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.
Erläutern Sie die erste Zeile der zugehörigen Matrix im Sachzusammenhang.
Erläutern Sie die dritte Spalte dieser Matrix im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Bestand an Altvögeln, Eiern und Jungvögeln nach einem, 50 und 51 Jahren.
Vergleichen Sie die Ergebnisse.

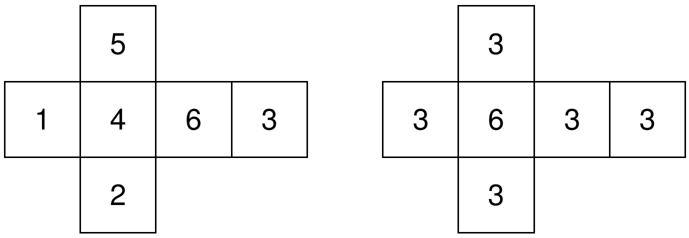
b) Zeigen Sie allgemein: Wenn eine Vogelpopulation, die sich nach der obigen Tabelle entwickelt, aus $5n$ Altvögeln, $10n$ Eiern und $4n$ Jungvögeln ($n \in \mathbb{N}$) besteht, dann ändert sich der Bestand nicht.
Ein auf die Insel eingeschleppter Raubmarder dezimiert die Altvögel, die während der Eiablage schutzlos sind. Durch ein allgemein besseres Nahrungsangebot können jedoch mehr Jungvögel das Erwachsenenalter erreichen.
Diese Entwicklung kann durch die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & c \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.
Es gibt einen Wert für c, so dass die Vogelpopulation langfristig einen stationären Zustand erreicht.
Bestimmen Sie diesen Wert für c.

c) Die Lebensumstände einer weiteren Vogelpopulation werden durch die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ mit $c > 0$ und $d > 0$ beschrieben.
Es gilt: $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot c \\ 2 \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 2 \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$.
Interpretieren Sie die Matrix C^2 im Sachzusammenhang.
Beurteilen Sie, ob die Population für $d = 0{,}4$ langfristig konstant bleiben kann.
Erläutern Sie, welche Bedingungen das Wertepaar $(c \mid d)$ erfüllen muss, damit die Population langfristig wächst. Geben Sie ein passendes Wertepaar an.

Block 2B – Aufgabe 2

a) Für ein Würfelspiel stehen zwei Würfel zur Verfügung, deren Netze unten abgebildet sind.

Würfel A Würfel B



Für jeden der beiden Würfel wird die Zufallsgröße „Augenzahl beim einfachen Wurf“ festgelegt.
Bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung.
Spieler 1 wirft einmal mit Würfel A, Spieler 2 einmal mit Würfel B. Der Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt, bei gleicher Augenzahl geht das Spiel unentschieden aus.
Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist.

b) Spieler 1 vermutet, dass der Würfel A gezinkt ist.
Beurteilen Sie, ob für einen nicht gezinkten Würfel die folgende Aussage wahr ist: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von sechs Würfen nur im letzten Wurf eine „6“ fällt, beträgt $\frac{1}{6}$.“
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Würfen nur im letzten Wurf eine „6“ fällt.
Zur Überprüfung, ob der Würfel A gezinkt, ist, wird er 600-mal geworfen. Dabei fällt 79-mal die „6“.
Mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $95{,}5\,\%$ soll überprüft werden, ob es sich um einen gezinkten Würfel handelt.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg.
Entscheiden Sie, ob es sich um einen gezinkten Würfel handelt.

Material

Anlage

Umgebungen des Erwartungswertes bei Binomialverteilungen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\sigma > 3$)						
Radius der Umgebung	$1 \cdot \sigma$	$1{,}64 \cdot \sigma$	$1{,}96 \cdot \sigma$	$2 \cdot \sigma$	$2{,}58 \cdot \sigma$	$3 \cdot \sigma$
Wahrscheinlichkeit	$68\,\%$	$90\,\%$	$95\,\%$	$95{,}5\,\%$	$99\,\%$	$99{,}7\,\%$