Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.
2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Lineare Algebra / Analytische Geometrie*

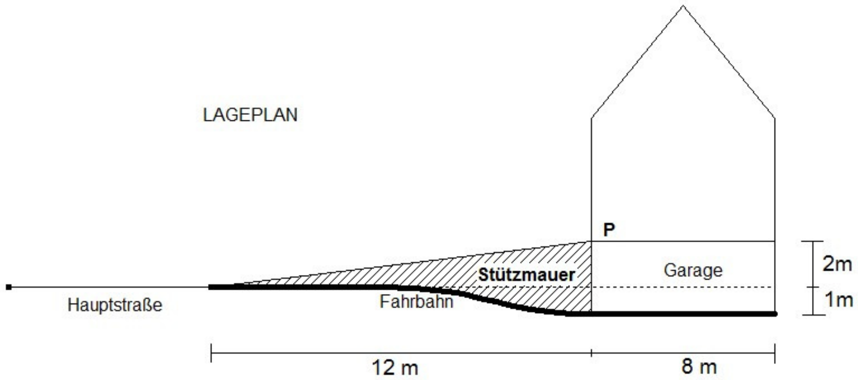
Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten.
Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. Eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. Ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Auf einem Hanggrundstück soll ein Haus mit Kellergarage gebaut werden (Maße siehe Lageplan).



In der Anlage ist in einem Koordinatensystem der Querschnitt der Fahrbahn in die Garage dargestellt. Dabei entspricht die x-Achse der Lage der Hauptstraße. Die Decke der Garage liegt 2 m höher als die Hauptstraße. Durch die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{1+e^{x-10}}-1$ wird für $0\le x\le 20$ der Querschnitt der Fahrbahn und des Garagenbodens beschrieben (x und f(x) in Metern).

a) Weisen Sie nach, dass gilt: $f'(x)=\frac{-e^{x-10}}{\left(1+e^{x-10}\right)^2}$.

Der Bauherr hat folgende Bedingungen aufgestellt:
- Die Höhe der Garageneinfahrt soll mindestens 2,80 m betragen.
- Innerhalb der Garage soll die mittlere Steigung nicht kleiner als $-0{,}02$ sein.
- Die Fahrbahn soll nicht zu steil abfallen und deshalb die Steigung von $-0{,}25$ nicht unterschreiten.

Untersuchen Sie, ob die Planung diesen Vorgaben entspricht.

b) Die im Lageplan eingezeichnete Oberkante der Stützmauer verläuft zwischen den Punkten $O(0\,|\,0)$ und P. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die diese Oberkante beschreibt.
Der sichtbare Teil der Stützmauer ist im Lageplan schraffiert dargestellt.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

c) Begründen Sie, dass für die Entfernung d des Punktes $P(12\,|\,2)$ von einem Punkt $Q(x\,|\,f(x))$ des Graphen von f gilt: $d(x)=\sqrt{(x-12)^2+(f(x)-2)^2}$.
Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung des im Lageplan eingezeichneten Punktes P von der Fahrbahn.
Vergleichen Sie diese Entfernung mit der in a) berechneten Höhe der Garageneinfahrt.

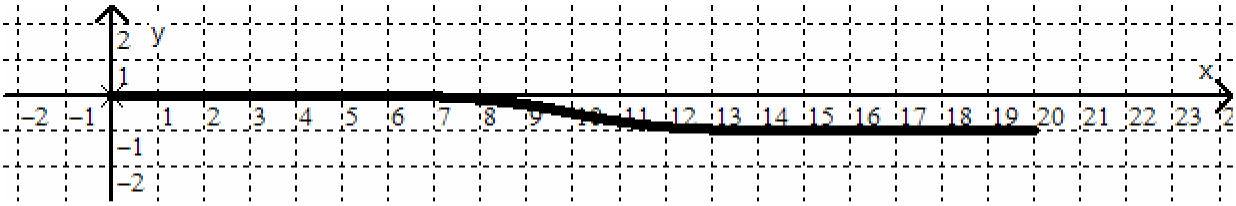
d) Der Punkt $A(8\,|\,f(8))$ des Graphen von f soll am Punkt $B(10\,|\,-0{,}5)$ gespiegelt werden.
Erläutern Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung der Koordinaten des Spiegelpunktes A'.
Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes A'.
Entscheiden Sie, ob dieser Punkt ebenfalls auf dem Graphen von f liegt.

Fortsetzung Aufgabe 1A

Material

Anlage

Querschnitt der Fahrbahn und des Garagenbodens im Koordinatensystem



Aufgabe 1B

Gegeben ist für $k \neq 0$ die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - 2k \cdot x^2 + k^2 \cdot x$ beziehungsweise in anderer Darstellung $f_k(x) = x \cdot (x-k)^2$.

a) In der Anlage ist in der Abbildung 1 ein Graph der Schar gezeichnet. Ermitteln Sie den zugehörigen Parameterwert für k.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_{-5} in das Koordinatensystem der Abbildung 1 der Anlage.
Untersuchen Sie die Funktionen der Schar auf Nullstellen.
Weisen Sie nach, dass für $x < 0$ kein Graph der Schar Punkte oberhalb der x-Achse besitzt.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f_k' von f_k.
Zeigen Sie, dass für diese Ableitung gilt: $f_k'(x) = (3x-k) \cdot (x-k)$.
Untersuchen Sie die Graphen der Schar für $k > 0$ auf Extrempunkte. (Zur Kontrolle: Für $k > 0$ liegen die Hochpunkte an den Stellen $x = \frac{k}{3}$.)
Zeigen Sie, dass die Hochpunkte zu $k > 0$ auf dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = 4x^3$ liegen.
Entscheiden Sie, ob es Graphen der gesamten Schar gibt, deren Hochpunkte nicht auf dem Graphen der Funktion h liegen.

c) Der Graph der Funktion f_3 schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Diese ist in der Abbildung 2 der Anlage markiert. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Ermitteln Sie diejenigen Parameter k, für die der Graph der Funktion f_k mit der x-Achse eine Fläche von 108 FE einschließt. Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass die Funktion F_k mit $F_k(x) = \frac{x^2 \cdot (3x^2 - 8k \cdot x + 6k^2)}{12}$ eine Stammfunktion von f_k ist.

d) Vergleichen Sie die Graphen der Funktionen f_{-3} und f_3 anhand der Lage ihrer Nullstellen und Extrempunkte.
Die Funktionen der Funktionenschar erfüllen für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f_k(-x) = -f_{-k}(x)$.
Interpretieren Sie die geometrische Bedeutung dieser Beziehung.
Ermitteln Sie ausgehend von dieser Beziehung und deren Interpretation eine Gleichung für die Ortslinie der Tiefpunkte der Graphen der Schar für $k < 0$.

Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage

Abbildung 1 zu Teilaufgabe a)

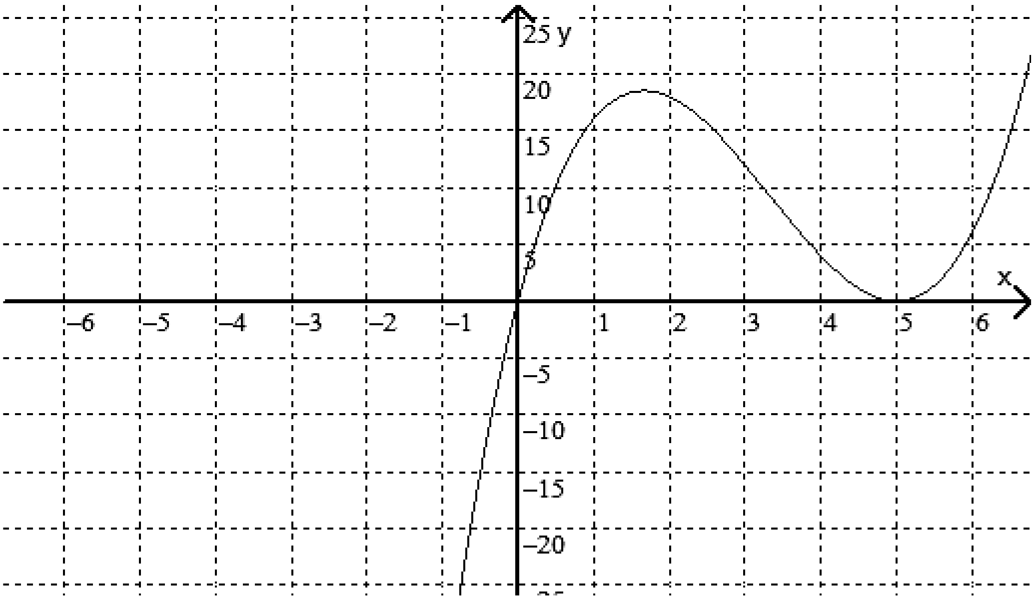
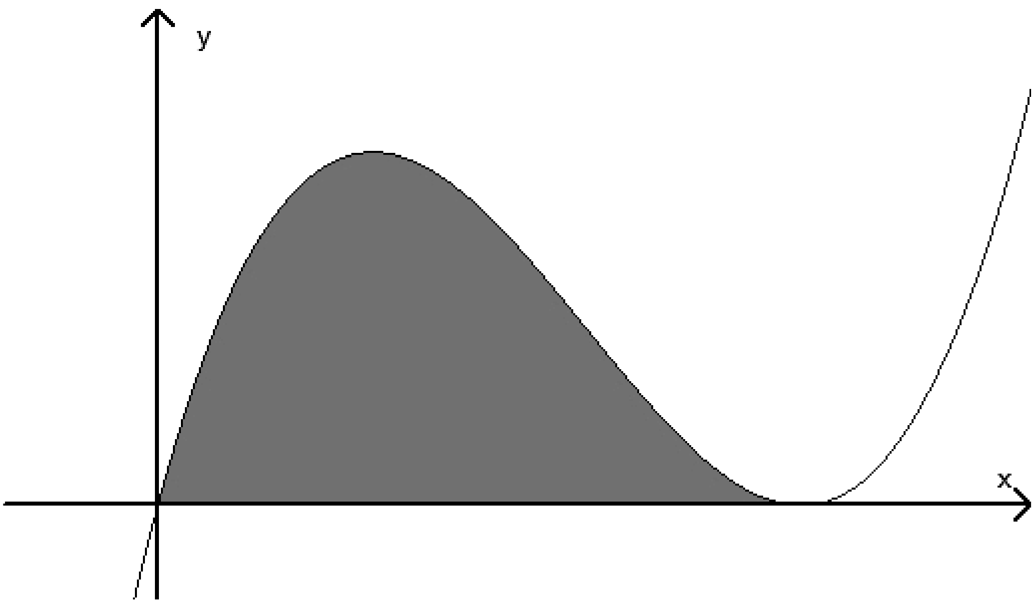


Abbildung 2 zu Teilaufgabe c)



Block 2A – Aufgabe 1

Bei einer Rinderrasse gibt es unterschiedliche Zuchtlinien. Während die meisten Rinder schwarz sind, ist die weiße Zuchtlinie selten und deshalb wertvoller. Zur Vermehrung der weißen Rinder wird vom Bauernverband ein Zuchtprogramm aufgelegt. Da Kälber von schwarzen Kühen und weißen Bullen oft weiß sind, sollen die Verbandsmitglieder versuchen, mit ihren schwarzen Kühen und einem weißen Bullen weiße Kälber zu züchten. Es werden dann weiße und schwarze Kälber geboren. Leider sind manche Kälber aber gefleckt und für die weitere Zucht ungeeignet. Aus Erfahrung ist bekannt, dass etwa 40% dieser Kälber weiß, 50% schwarz und 10% gefleckt sind.

a) Ein Bauer erwartet, dass 3 Kälber geboren werden. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der weißen Kälber und kann als binomialverteilt angenommen werden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: Es wird mehr als ein weißes Kalb geboren.
E_2: Die ersten zwei Kälber sind weiß.
E_3: Unter den Kälbern ist mindestens ein männliches weißes Kalb unter der Voraussetzung, dass männliche und weibliche weiße Kälber mit gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden.

b) Ein Bauer überlegt, ob er am Zuchtprogramm teilnehmen soll. Bisher hat er beim Verkauf vom Verband für jedes Kalb 250 € bekommen. Nimmt er am Zuchtprogramm teil, so bietet der Verband die nebenstehenden Preise:

Farbe	Preis pro Kalb
weiß	x €
schwarz	180 €
gefleckt	80 €

Bestimmen Sie den Preis für ein weißes Kalb, so dass der Verband erwarten kann, dass für ihn die Kosten gleich bleiben.
Der Verband entscheidet sich für den Preis von 350 € für jedes weiße Kalb. Außerdem soll ein Anreiz zur Teilnahme dadurch gegeben werden, dass ein Förderbetrag von 20 € pro Kalb gezahlt wird. Beurteilen Sie, ob sich die Teilnahme am Zuchtprogramm für den Bauern voraussichtlich lohnen wird.

c) Der Bauernverband möchte die oben genannten Erfahrungswerte $p(\text{weiß}) = 40\%$, $p(\text{schwarz}) = 50\%$ und $p(\text{gefleckt}) = 10\%$ überprüfen.
Die ersten 600 gemeldeten Kälber haben nebenstehende Farbverteilung:

Farbe	Anzahl
weiß	197
schwarz	293
gefleckt	110

Bestimmen Sie jeweils das Vertrauensintervall für den Anteil weißer Kälber und für den Anteil schwarzer Kälber (jeweils $\gamma = 0{,}95$).
Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den oben genannten Erfahrungswerten.
Berechnen Sie die Länge des Intervalls für $p(\text{schwarz})$.
Der Verband möchte seine neuen Erfahrungswerte erst dann veröffentlichen, wenn dieses Intervall durch eine höhere Anzahl geborener Kälber nur noch eine Länge von höchstens 0,05 hat. Dabei soll der alte Erfahrungswert $p(\text{schwarz}) = 50\%$ zugrunde gelegt werden.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg und bestimmen Sie auf 50 Kälber genau die Mindestanzahl geborener Kälber, so dass diese Vorgabe mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% erfüllt wird.

Material

Anlage

Umgebungen des Erwartungswertes bei Binomialverteilungen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\sigma > 3$)						
Radius der Umgebung	$1 \cdot \sigma$	$1{,}64 \cdot \sigma$	$1{,}96 \cdot \sigma$	$2 \cdot \sigma$	$2{,}58 \cdot \sigma$	$3 \cdot \sigma$
Wahrscheinlichkeit	68%	90%	95%	$95{,}5\%$	99%	$99{,}7\%$

Block 2A – Aufgabe 2

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

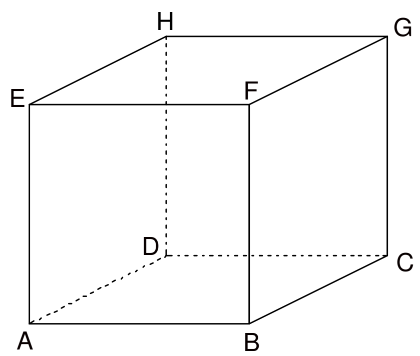
a) Die Gerade g durchstößt die xy-Ebene im Punkt C, die yz-Ebene im Punkt P und die xz-Ebene im Punkt E.
Untersuchen Sie, ob die Strecken $\overline{CP}$ und $\overline{PE}$ gleich lang sind.

b) Gegeben sind die Punkte $A(8\,|\,0\,|\,0)$ und $G(-8\,|\,16\,|\,16)$.
Es gibt einen Würfel ABCDEFGH, dessen Grundfläche ABCD in der xy-Ebene liegt und der die Strecke $\overline{AG}$ als Raumdiagonale besitzt. Bestimmen Sie die Kantenlänge des Würfels und die Koordinaten der Eckpunkte B, C, D, E, F und H.
In der Anlage ist die Planskizze dieses Würfels zu sehen.

Material

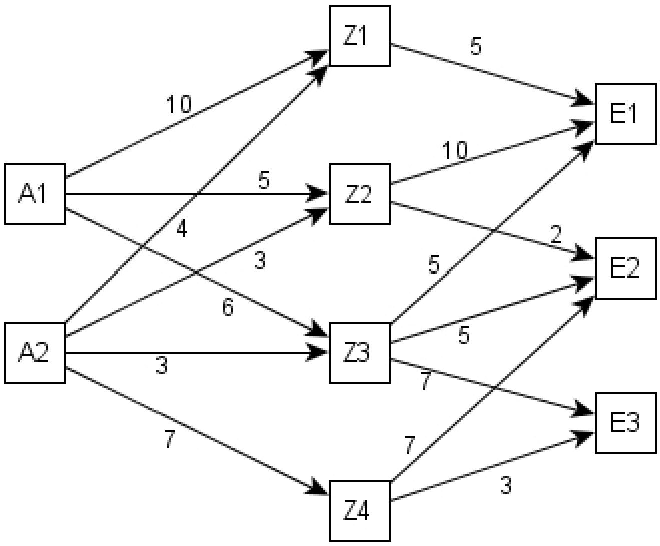
Anlage

Planskizze des Würfels



Block 2B – Aufgabe 1

Ein Betrieb stellt aus den Ausgangsprodukten A_1 und A_2 vier verschiedene Zwischenprodukte (Z_1 bis Z_4) her, die dann zur Produktion von drei verschiedenen Endprodukten (E_1, E_2, E_3) verwendet werden. Der Produktionsprozess sowie die jeweils benötigten Stückzahlen werden durch den folgenden Verflechtungsgraphen beschrieben:



a) Bestimmen Sie diejenigen Übergangsmatrizen, die den Übergang von den Ausgangsprodukten zu den Zwischenprodukten bzw. von den Zwischenprodukten zu den Endprodukten beschreiben.
Ermitteln Sie, wie viel Stück der beiden Ausgangsprodukte jeweils benötigt werden, um 20 Stück von jedem Endprodukt zu produzieren.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Ausgangsprodukte A_1 und A_2 in einem Stück des Endproduktes E_1.

b) Im Lager befinden sich noch 10000 Stück des Ausgangsproduktes A_1, der Vorrat des Ausgangsproduktes A_2 ist nicht beschränkt. Es sollen gleiche Stückzahlen aller drei Endprodukte produziert werden.
Ermitteln Sie, wie viel Stück jeweils produziert werden können.
Das Endprodukt E_3 soll verändert werden, indem das Zwischenprodukt Z_2 in dessen Herstellungsprozess eingebracht wird. Es sollen nicht mehr als zusammen 130 Stück der beiden Ausgangsprodukte A_1 und A_2 für die Produktion von einem Stück E_3 eingesetzt werden.
Beschreiben Sie, welche Veränderung in den Übergangsmatrizen vorgenommen werden muss, damit diese neue Forderung erfüllt werden kann.
Berechnen Sie, wie viel Stück von Z_2 dann maximal in die Produktion von einem Stück E_3 eingebracht werden können.

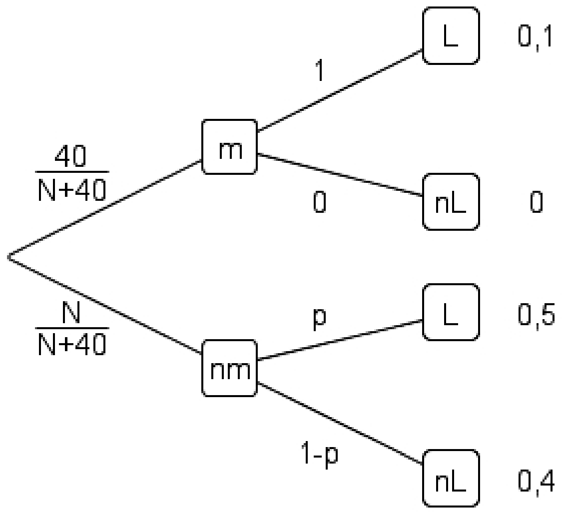
c) Gegeben ist die Gleichung: $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 20 \\ 8 & d \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass sich die Parameter a, b, c und d eindeutig bestimmen lassen, und geben Sie diese Parameter an.

Block 2B – Aufgabe 2

Ein Angelverein versucht Informationen über den Bestand seiner Teiche zu gewinnen. Besonders wichtig ist dabei der Anteil der Fische, die eine Mindestlänge L besitzen.

a) Ein Teich, der nur mit Karpfen und Schleien besetzt ist, hat einen Anteil von 60% Karpfen. 40% aller Fische sind Karpfen, die die Mindestlänge besitzen. Ein Viertel der Schleien unterschreiten die Mindestlänge.
Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm, in dem diese Informationen eingetragen sind.
Bestimmen Sie mithilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten dafür,
- dass ein Karpfen die Mindestlänge besitzt.
- dass ein zufällig entnommener Fisch eine Schleie ohne Mindestlänge ist.
- dass ein Fisch, der die Mindestlänge besitzt, eine Schleie ist.

b) In einem anderen Teich, der nur mit Karpfen besetzt ist, soll der Gesamtbestand und der Anteil der Karpfen mit Mindestlänge geschätzt werden. Dazu werden 40 Karpfen, die alle die Mindestlänge besitzen, neu gekauft, markiert und in den Teich gesetzt. Nach kurzer Zeit werden zufällig 30 Karpfen entnommen und auf die Markierung m und die Mindestlänge L hin geprüft. Man findet 3 markierte und 15 unmarkierte Karpfen, die jeweils die Mindestlänge haben. Vereinfachend darf davon ausgegangen werden, dass die Verteilung der Fische in der Probe einen ausreichend guten Näherungswert für die Verteilung der Fische im gesamten Teich liefert. Das untenstehende Baumdiagramm beschreibt die Situation.
Erläutern Sie die Bedeutung der Variablen N und p und berechnen Sie N und p.



m:	markiert
nm:	nicht markiert
L:	Mindestlänge
nL:	nicht Mindestlänge