Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (50%)	Block 2 Stochastik (25%)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (25%)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Die Gewichtung der Blöcke ist in Klammern angegeben.

Auswahlzeit: 20 Minuten

Bearbeitungszeit: 300 Minuten

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung einer Mäusepopulation in einem Lagerhaus für 200 Tage:

Zeit in Tagen	0	10	20	30	40	50	100	150	160	170	180	190	200
Anzahl der Mäuse	50	80	132	215	350	540	2990	4740	4840	4900	4940	4960	4980

a) In einer ersten Modellierung soll exponentielles Wachstum mit der Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ angenommen werden; x in Tagen und $f(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x.
Bestimmen Sie die Parameter a und k mithilfe der Daten für $x = 0$ und $x = 40$.
(Kontrollergebnis: $a = 50$ und $k \approx 0{,}04865$)
Berechnen Sie, wie viele Mäuse nach 100 Tagen im Lagerhaus leben und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Tabellenwert.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die Anzahl von 1000 Mäusen überschritten wird.
Ermitteln Sie den Tag, an dem die momentane Zuwachsrate erstmalig größer als 10 Mäuse pro Tag ist.
Erläutern Sie Möglichkeiten und Grenzen dieser Modellierung im Sachzusammenhang.

b) In einer zweiten Modellannahme wird logistisches Wachstum mit der Funktion g mit
$g(x) = \dfrac{5000}{1 + 100 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}}$ zugrunde gelegt; x in Tagen, $g(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und erläutern Sie die Bedeutung des Grenzwertes im Sachzusammenhang.
Skizzieren Sie den Graphen von g und die Asymptote.
Für die ersten 50 Tage soll der Graph der Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ betrachtet werden.
Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von d im Sachzusammenhang.

c) Erläutern Sie $g'(100) = 60{,}1...$ im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, an denen die momentane Änderungsrate von g mit der durchschnittlichen Änderungsrate von g zwischen $x = 0$ und $x = 200$ übereinstimmt.
Die Differentialgleichung beim logistischen Wachstum mit der Sättigungsgrenze S und der Wachstumskonstanten c lautet allgemein: $h'(x) = c \cdot h(x) \cdot (S - h(x))$.
Zeigen Sie, dass gilt: $h''(x) = c \cdot S \cdot h'(x) - 2 \cdot c \cdot h(x) \cdot h'(x)$.
Leiten Sie mithilfe der Differentialgleichungen her, dass mit $c > 0$ und $0 < h(x) < S$ für die y-Koordinate der Wendepunkte gilt: $h(x_w) = \dfrac{S}{2}$.

Fortsetzung Aufgabe 1A

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar g_k mit

$g_k(x) = \dfrac{5000}{1+100\cdot e^{-k\cdot x}}$, $k > 0$, $x \in \mathrm{IR}$, betrachtet.

Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters k auf
- den Schnittpunkt mit der y-Achse und
- die Asymptoten.

Zeigen Sie, dass gilt: $g_k'(x) = \dfrac{500000\cdot k\cdot e^{-k\cdot x}}{\left(1+100\cdot e^{-k\cdot x}\right)^2}$.

Die Tangenten an die Graphen von g_k an der Stelle $x = 0$ werden mit t_k bezeichnet.

Erläutern Sie, dass gilt: $t_k(x) = \dfrac{500000\cdot k}{(1+100)^2}\cdot x + \dfrac{5000}{1+100}$.

Die Tangenten t_k bilden mit den Koordinatenachsen jeweils ein Dreieck.

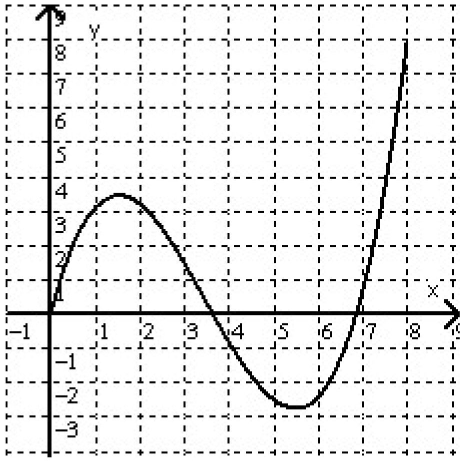
Untersuchen Sie, ob folgende Aussage für jedes $k > 0$ gilt: Wenn man k halbiert, dann verdoppelt sich der Flächeninhalt dieser Dreiecke.

Aufgabe 1B

Ein quaderförmiges Wasserbecken mit 3 m Länge, 2 m Breite und 2 m Höhe hat einen Wasserzulauf und einen Wasserablauf.

Die Funktion f mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $0 \le x \le 8$, beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken. Dabei wird x in Stunden und $f(x)$ in Kubikmeter pro Stunde angegeben. Zu Beginn ist das Becken leer.

a) Berechnen Sie die Änderungsrate nach 2 Stunden.
Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$ und dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph von f dargestellt.
Begründen Sie mithilfe dieser Grafik, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet.
Ermitteln Sie für die Gesamtzeitdauer von 8 Stunden den zeitlichen Anteil in Prozent, für den die Wassermenge im Becken abnimmt.



b) Bestimmen Sie den zweiten Zeitpunkt, zu dem das Becken genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist.
Ermitteln Sie die Wassermengen, die zu genau drei Zeitpunkten angenommen werden.
Ermitteln Sie die maximale Höhe des Wasserstandes im Becken innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden.

c) Bei gleichen Ausgangsbedingungen soll die Änderungsrate der Wassermenge nun modellhaft durch die folgende zusammengesetzte Funktion h beschrieben werden:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x & \text{für} \quad 0 \le x < 2{,}5 \\ g(x) = 2{,}5 \cdot e^{1{,}75 - 0{,}7 \cdot x} & \text{für} \quad 2{,}5 \le x < \infty \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar ist.
Zeigen Sie, dass G mit $G(x) = -\frac{25}{7} \cdot e^{1{,}75 - 0{,}7 \cdot x}$ eine Stammfunktion von g ist.
Untersuchen Sie, ob das Wasserbecken jemals überläuft.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - k \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $k > 0$, $x \in \mathbb{R}$, betrachtet.
Die Tangenten an die Graphen von f_k in den Punkten $Q_k(5 \mid f_k(5))$ werden mit t_k bezeichnet.
Begründen Sie: Für alle $k > 0$ ist die Gerade durch $R(2{,}5 \mid 0)$ und $Q_k(5 \mid f_k(5))$ gleichzeitig auch Tangente im Punkt $Q_k(5 \mid f_k(5))$.
Für die y-Koordinate der Wendepunkte gilt jeweils: $y_k = \frac{25}{3} \cdot k - \frac{50}{27} \cdot k^3$.
Untersuchen Sie, ob es Wendepunkte gibt, für die die y-Koordinate fünfmal so groß ist wie die zugehörige x-Koordinate.

Aufgabe 2A

Die Körpergröße und das Körpergewicht zehnjähriger Kinder werden als normalverteilt angenommen.

a) Bei einer Stichprobe in Niedersachsen wurde die Größe von 75 Kindern gemessen.
Folgende Ergebnisse wurden notiert:

Größe in m	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57
Anzahl	2	2	2	3	3	4	5	8	9	9	7	4	4	3	3	3	2	2

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der Größe der Kinder und die empirische Standardabweichung s_{75}.

Die normalverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Größe von zehnjährigen Kindern in Niedersachsen. Die Kenngrößen $\mu = 1{,}48\text{ m}$ und $\sigma = 0{,}04\text{ m}$ sind bekannt.

Berechnen Sie, wie viel Prozent aller zehnjährigen Kinder in Niedersachsen größer als 1,53 m sind.
Bestimmen Sie ein symmetrisches Intervall (auf cm genau) um den Erwartungswert μ so, dass die Körpergröße von mindestens $94\,\%$ aller zehnjährigen Kinder in Niedersachsen in diesem Intervall liegt.

b) In Schweden wurde eine Stichprobe mit dem Umfang $n = 75$ durchgeführt. In dieser Gruppe sind 18 Kinder größer als 1,53 m.
Bestimmen Sie ein Vertrauensintervall $(\gamma = 95\,\%)$ für den tatsächlichen Anteil p dieser Kinder in der Altersgruppe der Zehnjährigen und geben Sie die Länge des Intervalls an.
Die Länge eines Vertrauensintervalls kann durch Vergrößerung des Stichprobenumfangs verkleinert werden. Aufgrund der ersten Stichprobe kann für die Berechnung des Mindeststichprobenumfangs folgende Ungleichung verwendet werden: $|h - p| \leq 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}227}{n}}$ $(\gamma = 95\,\%)$.

Bestimmen Sie den Mindeststichprobenumfang so, dass die Länge des Vertrauensintervalls höchstens 0,04 beträgt.

c) Die Zufallsgröße Y beschreibt das Körpergewicht eines zehnjährigen Kindes in Niedersachsen.
Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist 40 kg. Außerdem ist bekannt, dass $3\,\%$ dieser Kinder schwerer als 45,5 kg sind.
Bestimmen Sie die Standardabweichung.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Kindern genau 25 Kinder leichter als 40 kg sind.
In Schweden wurden 500 Kinder dieser Altersgruppe gewogen. Für den unbekannten Anteil p an Kindern, die leichter als 35 kg sind, ist $[0{,}0802\,;0{,}1338]$ ein Vertrauensintervall mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit von $95\,\%$.

Bestimmen Sie eine mögliche Anzahl solcher Kinder, die der Berechnung des gegebenen Vertrauensintervalls zugrunde gelegen haben könnte.

Aufgabe 2B

Eine Firma sortiert Nüsse und verarbeitet sie weiter. Dabei wird zwischen Nüssen mit verwertbaren Kernen und Nüssen ohne verwertbare Kerne unterschieden. Die nicht ausgesonderten Nüsse werden im Folgenden kurz als „brauchbare" Nüsse bezeichnet.

a) Gehen Sie bei den Berechnungen davon aus, dass 10 % der angelieferten Nüsse ohne verwertbare Kerne sind.
Die Maschine A sondert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}95$ Nüsse ohne verwertbare Kerne aus. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0{,}02$ werden jedoch auch Nüsse mit verwertbaren Kernen ausgesondert.
Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
- E_1: Eine Nuss hat einen verwertbaren Kern und wird nicht ausgesondert.
- E_2: Eine „brauchbare", also nicht ausgesonderte Nuss enthält einen verwertbaren Kern.
  (Zur Kontrolle: $P(E_2) \approx 0{,}994$)

b) Erläutern Sie, dass man unabhängig vom Sachkontext bei einer Binomialverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ mit $\sigma > 3$ näherungsweise davon ausgehen kann, dass gilt: $P(\mu - 1{,}78 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}78 \cdot \sigma) \approx 0{,}925$.
Die Herstellerfirma wirbt mit einer verbesserten Maschine B. Für eine Demonstration entnimmt man einer sehr großen Anzahl an sortierten Nüssen 5000 Nüsse, die als „brauchbar" eingestuft wurden. Von diesen sind jedoch 24 ohne verwertbaren Kern.
Beurteilen Sie auf der Basis einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $\gamma = 92{,}5\,\%$, ob man anhand dieser Stichprobe davon ausgehen kann, dass die Maschine B Nüsse besser aussondert, also der Anteil der Nüsse mit verwertbarem Kern an den „brauchbaren" Nüssen größer ist als bei Maschine A. [Hinweis: Verwenden Sie als Vergleich dabei den Wert $P(E_2) \approx 0{,}994$ aus Teilaufgabe a).]

c) Die „brauchbaren" Nüsse werden in Beutel zu 50 Nüssen verpackt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine „brauchbare" Nuss keinen verwertbaren Kern hat, ist $0{,}006$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
- E_3: Ein Beutel enthält keine Nuss ohne verwertbaren Kern.
- E_4: Nur die erste einem Beutel entnommene Nuss hat keinen verwertbaren Kern.

Es sollen alle möglichen Wahrscheinlichkeiten p angegeben werden, so dass bei der Überprüfung eines Beutels in mindestens $95\,\%$ der Fälle nur Nüsse mit verwertbarem Kern vorkommen.
Bestimmen Sie das Intervall H, in dem diese Wahrscheinlichkeiten liegen.
Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$ kommen nur Nüsse mit verwertbarem Kern vor. Für ein Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $\gamma = 95\,\%$ berechnet jemand das Intervall $G = [0; 0{,}0714]$.
Begründen Sie, welches der beiden Intervalle G und H in der vorgelegten Situation bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $\gamma = 95\,\%$ das geeignetere Vertrauensintervall ist.

Aufgabe 3A

In einer Kleinstadt konkurrieren zwei Telefonanbieter um die Gunst der insgesamt 5000 Kunden: AudioNet (AN) und DirektCom (DC).
Die Telefonkunden können ihre Verträge monatlich kündigen. Die nebenstehende Übergangstabelle beschreibt die monatlichen Übergänge zwischen den beiden Anbietern. Für diese Modellierung wird vorausgesetzt, dass sich die monatliche Entwicklung in der beschriebenen Weise fortsetzen wird.

		von	
		AN	DC
nach	AN	0,7	0,1
	DC	0,3	0,9

a) A ist die zur Übergangstabelle gehörende Übergangsmatrix.
Erläutern Sie die Bedeutung der zwei Werte in der Hauptdiagonalen der Matrix A im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie für A^2 den Wert in der zweiten Spalte und zweiten Zeile. Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie die Verteilung $\vec{s}$ der Telefonkunden, für die gilt: $A \cdot \vec{s} = \vec{s}$.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Das Wechselverhalten der Kunden hat sich verändert. Es ist nun lediglich bekannt, dass der Anteil der Kunden, die monatlich bei AudioNet verbleiben, auf 40 % gesunken und die stationäre Verteilung für die Anteile der Kunden $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ ist.
Ermitteln Sie die fehlenden drei Anteile für die Übergänge.

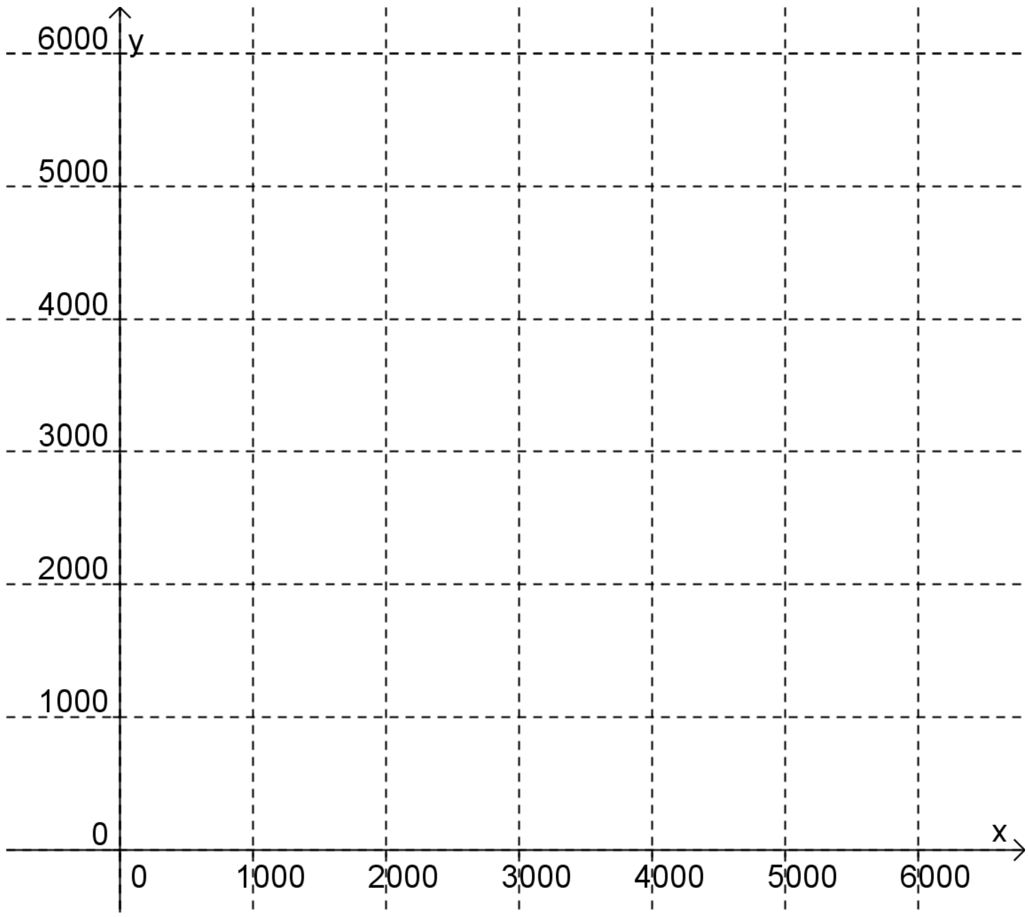
D und E sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$, $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ und $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}$ ist ein beliebiger Vektor mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass aus $D \cdot \vec{x} = \vec{x}$ folgt: $(D - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
Begründen Sie, dass das zugehörige lineare Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist.

c) Gegeben sind die stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1250 \\ 3750 \end{pmatrix}$ aus Aufgabenteil a) und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1000 \\ -1000 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie die Gerade $g: \vec{x} = \vec{s} + r \cdot \vec{u}$ in das Koordinatensystem der Anlage.
Zeichnen Sie ebenfalls die Anfangsverteilung $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2500 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor ein.
Es gilt: $\vec{v}_0 = \vec{s} + r_0 \cdot \vec{u} = \vec{s} + 1{,}25 \cdot \vec{u}$ und $A \cdot \vec{u} = 0{,}6 \cdot \vec{u}$.
Zeigen Sie, dass mit $\vec{v}_1 = A \cdot \vec{v}_0$ gilt: $\vec{v}_1 = \vec{s} + 1{,}25 \cdot 0{,}6 \cdot \vec{u}$.
Es gilt: $\vec{v}_n = \vec{s} + 1{,}25 \cdot 0{,}6^n \cdot \vec{u}$.
Begründen Sie, dass für $n \to \infty$ folgt: $\vec{v}_n \to \vec{s}$.
Erläutern Sie das Ergebnis geometrisch.

Fortsetzung Aufgabe 3A

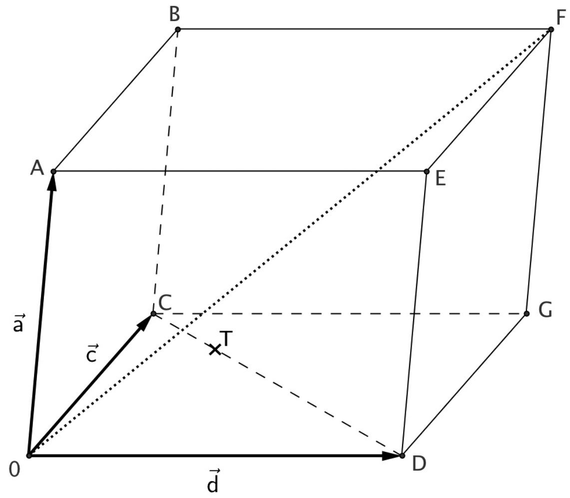
Material

Anlage: Koordinatensystem zu Teilaufgabe c)



Aufgabe 3B

Gegeben sind $O(0|0|0)$, $A(2|0|8)$, $C(-2|4|4)$ und $D(6|8|0)$ als Eckpunkte des in der Abbildung dargestellten Spats.



a) Weisen Sie nach, dass für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt: $\overrightarrow{AC} \neq k \cdot \overrightarrow{CD}$.
Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Hinblick auf die gegenseitige Lage der Punkte A, C und D.
Bestimmen Sie die Größe des von den Kantenvektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ eingeschlossenen Winkels.
Der in der Abbildung eingezeichnete Punkt T teilt die Flächendiagonale $\overline{CD}$ im Verhältnis $1:3$.
Ermitteln Sie die Koordinaten von T sowie die des Eckpunktes F des Spats.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $M(2|6|2)$ die Strecke $\overline{CD}$ halbiert.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und M die Raumdiagonale $\overline{OF}$ des Spats schneidet, und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
Begründen Sie, dass keine andere Gerade, die durch A und einen beliebigen Punkt der Strecke $\overline{CD}$ verläuft, einen Schnittpunkt mit $\overline{OF}$ besitzt.

c) E ist die Ebene, in der die Eckpunkte A, C und D des Spats liegen.
Zeigen Sie, dass alle Punkte P der Ebene E, deren Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zu $\overrightarrow{AC}$ sind, auf einer Geraden liegen, und ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.