Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (50%)	Block 2 Stochastik (25%)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (25%)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Die Gewichtung der Blöcke ist in Klammern angegeben.

Auswahlzeit: 20 Minuten

Bearbeitungszeit: 220 Minuten

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung einer Mäusepopulation in einem Lagerhaus für 200 Tage:

Zeit in Tagen	0	10	20	30	40	50	100	150	160	170	180	190	200
Anzahl der Mäuse	50	80	132	215	350	540	2990	4740	4840	4900	4940	4960	4980

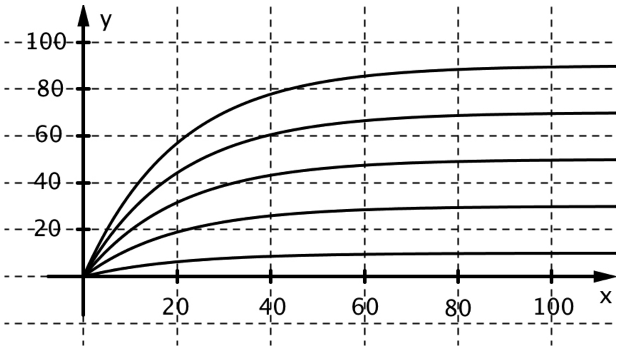
a) Für die ersten 50 Tage soll exponentielles Wachstum mit der Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ angenommen werden; x in Tagen und $f(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x.
Bestimmen Sie die Parameter a und k mit Hilfe der Daten für $x = 0$ und $x = 40$.
(Kontrollergebnis: $a = 50$ und $k \approx 0{,}04865$)
Berechnen Sie, wie viele Mäuse nach 47 Tagen im Lagerhaus leben.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die Anzahl von 400 Mäusen überschritten wird.
Ermitteln Sie den Tag, an dem die momentane Zuwachsrate erstmalig größer als 10 Mäuse pro Tag ist.

b) Nun soll der Zeitraum ab dem 150. Tag genauer untersucht werden. Für diesen Zeitraum wird beschränktes Wachstum mit der Funktion g mit $g(x) = 5000 - 500000 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}$ angenommen; x in Tagen und $g(x)$ in Anzahl der Mäuse zum Zeitpunkt x.
Begründen Sie, dass für den Grenzwert gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 5000$ und erläutern Sie die Bedeutung des Grenzwertes im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die Anzahl der Mäuse 99 % des maximal möglichen Bestandes überschreitet.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g und die Asymptote in das Koordinatensystem der Anlage.
Erläutern Sie anhand der erstellten Abbildung die Möglichkeiten und Grenzen der beiden hier verwendeten mathematischen Modelle „exponentielles Wachstum“ bzw. „beschränktes Wachstum“.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $g'(x) = 25000 \cdot e^{-0{,}05 \cdot x}$.
Erläutern Sie $g'(160) = 8{,}3...$ im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Tag, in dessen Verlauf die momentane Änderungsrate von g mit der durchschnittlichen Änderungsrate zwischen dem 150. und 200. Tag übereinstimmt.

Fortsetzung Aufgabe 1A

d) Die Funktionsgleichung $g_S(x) = S - S \cdot e^{-0,05 \cdot x}$ beschreibt für verschiedene Werte des Parameters S mögliche Entwicklungen von Populationen nach dem Modell des beschränkten Wachstums; in dem Bild finden sich Graphen für verschiedene Werte für S mit $S > 0$ und $x \geq 0$.

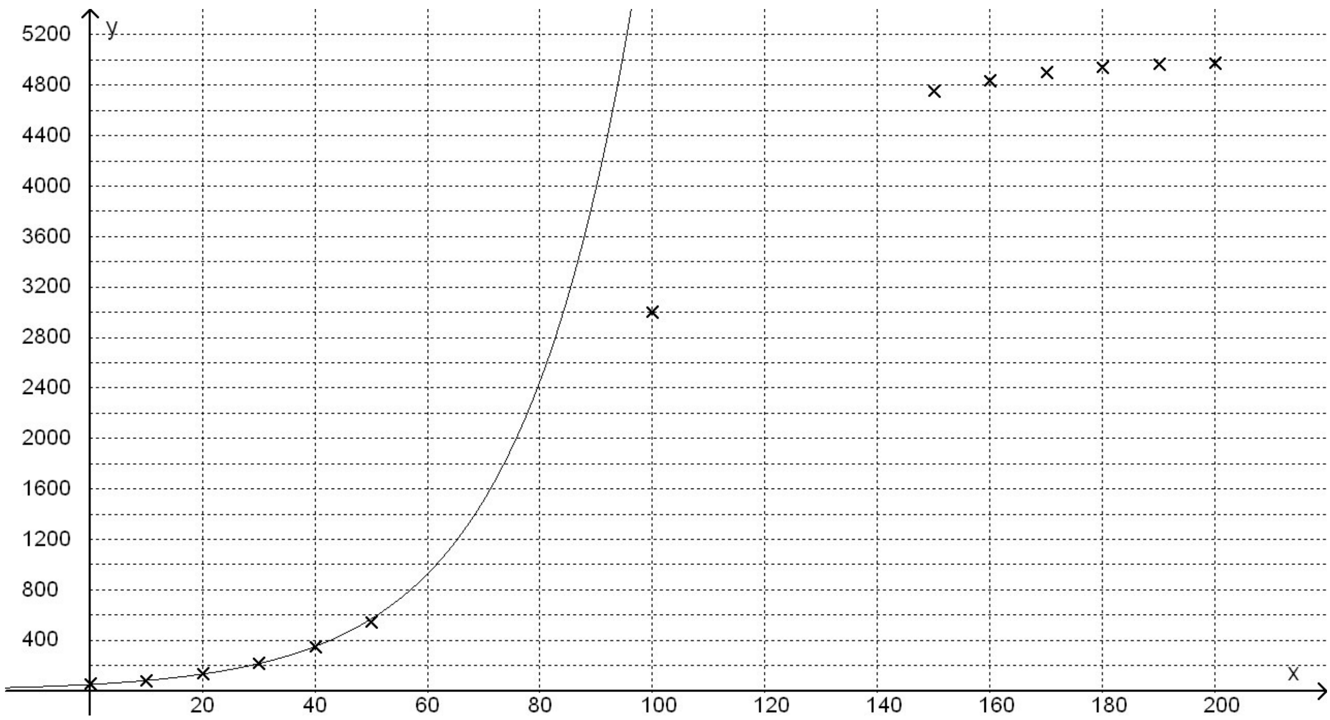


Begründen Sie für $x \geq 0$ anhand des Funktionsterms den Einfluss des Parameters S auf
- den Schnittpunkt mit der y-Achse und
- die Asymptote.

Untersuchen Sie, ob der Wert $\frac{1}{2}S$ für alle Funktionen g_S an der gleichen Stelle erreicht wird.

Material

Anlage: Koordinatensystem zu Teilaufgabe b)

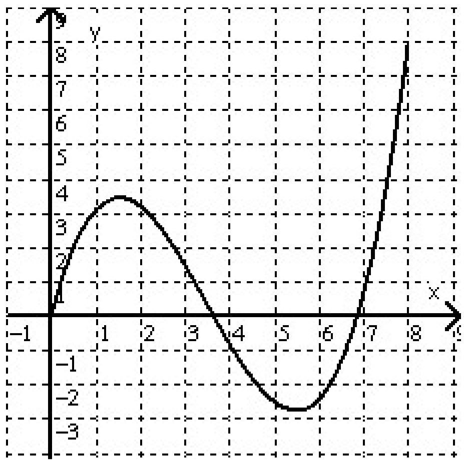


Aufgabe 1B

Ein quaderförmiges Wasserbecken mit 3 m Länge, 2 m Breite und 2 m Höhe hat einen Wasserzulauf und einen Wasserablauf.

Die Funktion f mit $f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $0 \le x \le 8$, beschreibt modellhaft die Änderungsrate der Wassermenge in diesem Becken.
Dabei werden x in Stunden und f(x) in Kubikmeter pro Stunde angegeben.
Zu Beginn ist das Becken leer.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph von f dargestellt.



a) Berechnen Sie die Änderungsrate nach 2 Stunden.
Ermitteln Sie die Zeitabschnitte, in denen die Wassermenge im Becken zu- beziehungsweise abnimmt.
Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$ und dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

b) Begründen Sie mithilfe der Grafik in der oben angegebenen Abbildung, dass sich nur zu Beginn kein Wasser im Becken befindet.
Bestimmen Sie den ersten Zeitpunkt, zu dem das Becken genau zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist.
Ermitteln Sie die maximale Wassermenge im Becken innerhalb des betrachteten Zeitintervalls von 8 Stunden.

c) Bei gleichen Ausgangsbedingungen soll die Änderungsrate der Wassermenge nun modellhaft durch die folgende zusammengesetzte Funktion h beschrieben werden:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - 2{,}1 \cdot x^2 + 5 \cdot x & \text{für } 0 \le x < 2 \\ g(x) = -x + 5{,}2 & \text{für } 2 \le x \le 8 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Übergangsstelle stetig und differenzierbar ist.
Ermitteln Sie die Wassermenge sowie die Höhe des Wasserstandes im Becken nach 8 Stunden.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit
$f_k(x) = 0{,}2 \cdot x^3 - k \cdot x^2 + 5 \cdot x$, $k > 0$, $x \in \mathbb{R}$, betrachtet.
Bei den Graphen dieser Schar werden die Tangenten t_k in den Punkten $P_k(5 \mid f_k(5))$ betrachtet.
Ermitteln Sie für $k = 2{,}1$ eine Gleichung dieser Tangente. Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Im Folgenden können Sie ohne Nachweis verwenden, dass für die Tangenten t_k gilt:
$t_k(x) = (20 - 10 \cdot k) \cdot x + 25 \cdot k - 50$.
Untersuchen Sie, ob sich alle Tangenten t_k in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2A

Man unterscheidet die Qualität von LCD-Bildschirmen anhand der Pixelfehler. Für Geräte ohne Pixelfehler (1. Wahl) kann der Hersteller einen höheren Preis erzielen als für Geräte mit Pixelfehlern (2. Wahl).
Eine Fabrik zur Produktion von LCD-Bildschirmen besitzt drei unterschiedliche Fertigungsstraßen A, B und C.
Fertigungsstraße A produziert 35 % und Fertigungsstraße B produziert 45 % aller Bildschirme.
63 % der Bildschirme von A und 25 % von B gehören zur 1. Wahl.
Insgesamt gehören 41,7 % der Bildschirme aller drei Fertigungsstraßen zur 1. Wahl.

a) Tragen Sie im Baumdiagramm der Anlage in die Felder die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
- E_1: Ein Bildschirm ist von Fertigungsstraße A produziert worden und gehört zur 1. Wahl.
- E_2: Ein Bildschirm, der von Fertigungsstraße C produziert worden ist, gehört zur 1. Wahl.

b) Die Bildschirmproduktion wird im Folgenden als Bernoulli-Kette aufgefasst.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
- E_3: Eine Stichprobe von 50 Bildschirmen von Fertigungsstraße B enthält genau 14 Bildschirme der 1. Wahl.
- E_4: Eine Stichprobe von 50 Bildschirmen von Fertigungsstraße B enthält mindestens 13 und höchstens 21 Bildschirme der 1. Wahl.

Erläutern Sie die Bedeutung der beiden Terme $\binom{50}{32}$ und $0{,}25^{32} \cdot 0{,}75^{18}$ in der Gleichung

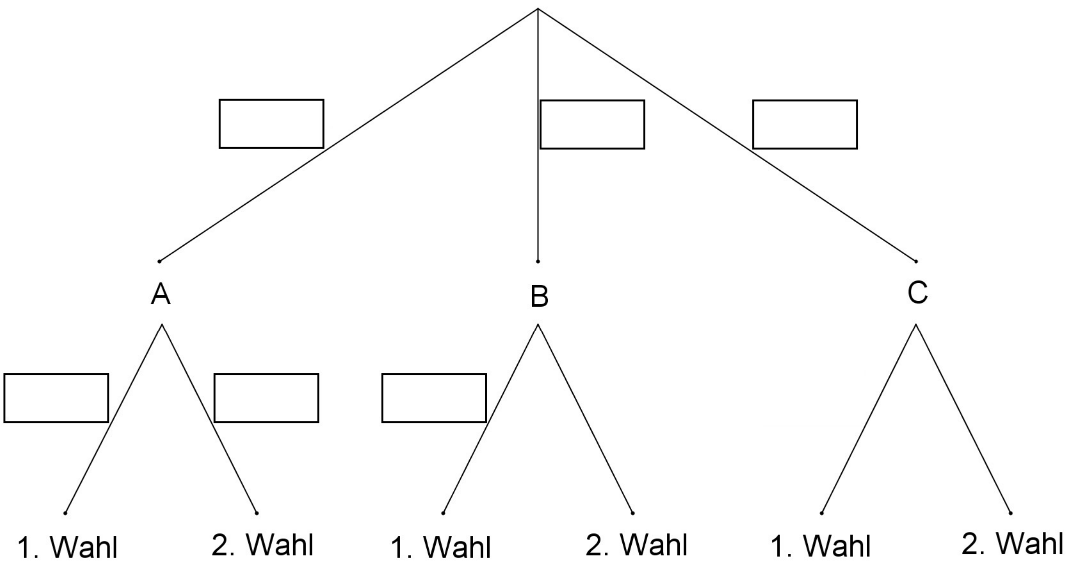
$$P(X = 32) = \binom{50}{32} \cdot 0{,}25^{32} \cdot 0{,}75^{18}.$$

c) Es wird eine vierte Fertigungsstraße eingerichtet, deren Fertigungsqualität noch nicht bekannt ist. Daher werden aus der laufenden Produktion ohne zwischenzeitliche Veränderungen an dieser Fertigungsstraße zwei Zufallsstichproben von jeweils 200 Bildschirmen entnommen. Die erste enthält 49 und die zweite 24 Geräte der 1. Wahl.
Bestimmen Sie für beide Stichproben jeweils ein Vertrauensintervall ($\gamma = 95\,\%$) für die unbekannte Wahrscheinlichkeit.
Beurteilen Sie folgende Aussage des Leiters der Qualitätskontrolle: „Eines der Stichprobenergebnisse muss falsch sein, da sich die Vertrauensintervalle nicht überschneiden."

Fortsetzung Aufgabe 2A

Material

Anlage: Baumdiagramm zu Teilaufgabe a)



Aufgabe 2B

Ein Glücksspiel besteht darin, zwei ideale Münzen mit den Ergebnissen „Wappen“ und „Zahl“ gleichzeitig zu werfen. Ein Spieler setzt einen bestimmten Betrag entweder auf „zweimal Wappen“ (WW) oder „zweimal Zahl“ (ZZ).

Spielregeln:

- Setzt der Spieler auf WW und es erscheint WW, so erhält er den doppelten Einsatz.
  Setzt er auf ZZ und es erscheint ZZ, so erhält er den doppelten Einsatz.
- Setzt der Spieler auf WW und es erscheint ZZ, dann verliert er seinen Einsatz.
  Setzt er auf ZZ und es erscheint WW, dann verliert er seinen Einsatz.
- Zeigt eine Münze W und die andere Z, so wird der Wurf wiederholt.
- Spätestens nach dem fünften Wurf ist das Spiel beendet. Liegen auch jetzt WZ oder ZW vor, so hat der Spieler seinen Einsatz verloren.

a) Der Spieler setzt in 50 Spielen immer auf ZZ, notiert die Ergebnisse und gewinnt insgesamt 26-mal.
Ergänzen Sie in der Tabelle der Anlage die fehlenden Einträge in den vier markierten Zellen.
Bestimmen Sie anhand dieser Stichprobe ein Vertrauensintervall ($\gamma = 95\,\%$) für die noch unbekannte Wahrscheinlichkeit, ein Spiel zu gewinnen.

b) Aufgrund der vorliegenden Stichprobe lässt sich nicht entscheiden, ob die Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen oder zu verlieren gleich groß sind.
Zeichnen Sie deshalb ein zu diesem Spiel passendes vereinfachtes Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. (Zur Kontrolle: $p = \frac{31}{64}$)
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe dieses Glücksspiels.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang.

Fortsetzung Aufgabe 2B

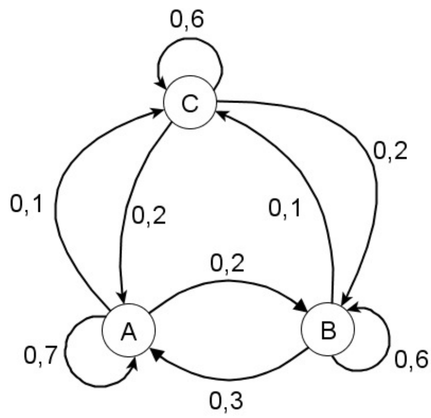
Material

Anlage: Tabelle zu Teilaufgabe a)

Spiel Nr.	1.Wurf	2.Wurf	3.Wurf	4.Wurf	5.Wurf	Ausgang	Anzahl der Würfe
1	WZ					verloren (V)	2
2	ZZ					gewonnen (G)	1
3	ZW	WZ	WZ	ZW	WZ	V	5
4	WZ	WZ	ZW	WZ	ZZ		5
5	ZW	ZW	WZ	ZZ		G	
6	ZW	WZ				G	3
7	WW					V	1
. . . .							
49	WW					V	1
50	WZ	ZW	ZZ			G	3

Aufgabe 3A

In einer Kleinstadt konkurrieren die drei Telefonanbieter A, B und C um die Gunst der insgesamt 5000 Kunden. Die Telefonkunden können ihre Verträge monatlich kündigen.
Das nebenstehende Übergangsdiagramm beschreibt die monatlichen Übergänge zwischen den drei Anbietern.
Für diese Modellierung wird vorausgesetzt, dass sich die monatliche Entwicklung in der beschriebenen Weise fortsetzen wird.



a) Ermitteln Sie mithilfe des Übergangsdiagramms die fehlenden Werte in der nebenstehenden Übergangsmatrix M.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 0{,}7 & \dots & 0{,}2 \\ \dots & 0{,}6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

Berechnen Sie die Verteilung der Kunden auf die drei Telefonanbieter nach einem Monat, falls zu Beginn Anbieter C insgesamt 3500 Kunden hatte und Anbieter A doppelt so viele Kunden wie Anbieter B besaß.

Berechnen Sie für M^2 den Wert in der zweiten Spalte und zweiten Zeile. Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.
Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie die Verteilung $\vec{s}$ der Telefonkunden, für die gilt: $M \cdot \vec{s} = \vec{s}$.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Das Wechselverhalten der Kunden hat sich verändert.
Außerdem wird angenommen, dass sich zu Beginn sämtliche Kunden bei Telefonanbieter C befinden.
Die Kundenanzahl des Anbieters C verringert sich monatlich um 20 %.
Ermitteln Sie die fehlenden Werte in der nebenstehenden Übergangsmatrix N.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ N = & \begin{pmatrix} 0{,}7 & \dots & 0{,}1 \\ \dots & 0{,}6 & \dots \\ \dots & \dots & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 3B

Die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,10\,|\,0)$, $C(0\,|\,20\,|\,-10)$ und $D(20\,|\,0\,|\,-10)$ bilden die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD.

a) Zeichnen Sie das Viereck ABCD in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sowie die Größe des Innenwinkels γ in C.
Der Winkel δ in D ist so groß wie der Winkel γ in C.
Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Viereck um ein symmetrisches Trapez handelt.

b) Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest.
Ermitteln Sie den Punkt P der Ebene E, dessen Koordinaten sich im Verhältnis $1:2:2$ verhalten.
Entscheiden Sie, ob dieser Punkt innerhalb des Dreiecks ABC liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte $Q(x\,|\,10-x\,|\,0)$ so, dass die Dreiecke CQD jeweils bei Q einen rechten Winkel haben.

Material

Anlage: Koordinatensystem zu Teilaufgabe a)