Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (50%)	Block 2 Stochastik (25%)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (25%)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Die Gewichtung der Blöcke ist in Klammern angegeben.

Auswahlzeit: 20 Minuten

Bearbeitungszeit: 300 Minuten

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut entscheidend. Im Folgenden wirkt das Medikament nur bei einer Konzentration von mindestens 1 Milligramm pro Liter $\left(\frac{mg}{\ell}\right)$. Es kann entweder direkt in die Blutbahn gespritzt oder als Tablette eingenommen werden.

a) Wenn das Medikament direkt in die Blutbahn gespritzt wird, dann kann die Konzentration des Wirkstoffes im Blut durch die Funktion f mit $f(x) = 8 \cdot e^{-0{,}4 \cdot x}$ beschrieben werden; x in Stunden und $f(x)$ in $\frac{mg}{\ell}$.
Skizzieren Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Tangente an den Graphen zum Zeitpunkt 0 mit den Koordinatenachsen.
Zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung des Graphen über dem Intervall $[0\,;13]$ und die Stelle a, an der die Steigung der Tangente der berechneten durchschnittlichen Steigung entspricht.
Erläutern Sie die Bedeutung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

b) Die Funktion f gehört zur Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 8 \cdot e^{-k \cdot x}$, $k > 0$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an die Graphen zum Zeitpunkt 0 und die Schnittpunkte S_k der Tangenten mit der x-Achse. (Zur Kontrolle: $t_k(x) = -8 \cdot k \cdot x + 8$)
Zeigen Sie, dass F_k mit $F_k(x) = -\frac{8}{k} \cdot e^{-k \cdot x}$ eine Stammfunktion von f_k ist.
Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f_k(x)\,dx$ wird als Bioverfügbarkeit des Wirkstoffes bezeichnet.
Weisen Sie nach, dass die Bioverfügbarkeit des Wirkstoffes gleich dem Inhalt des Rechtecks ist, das durch die Eckpunkte $P(0\,|\,0)$, $Q(0\,|\,f_k(0))$ und der oben berechneten Schnittpunkte S_k festgelegt wird.

c) Wenn das Medikament in Tablettenform verabreicht wird, lässt sich die Konzentration des Wirkstoffes im Blut mit der Funktion g mit $g(x) = 24 \cdot \left(e^{-0{,}4 \cdot x} - e^{-0{,}6 \cdot x}\right)$ beschreiben; x in Stunden und $g(x)$ in $\frac{mg}{\ell}$.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie
- den Zeitpunkt und den Wert der höchsten Konzentration des Wirkstoffes,
- den Zeitpunkt, an dem das Medikament am stärksten abgebaut wird,
- den Wirkbeginn und die Wirkdauer des Medikaments.
  (Zur Kontrolle: Das Ende der Wirkung tritt ca. 7,3 h nach Einnahme der Tablette ein.)

Es gilt $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty g(x)\,dx = 20$.
Bestimmen Sie die jeweiligen Zeitpunkte, ab denen 90 % der gesamten Bioverfügbarkeit des Wirkstoffes erreicht sind.
Vergleichen Sie beide Wege der Medikamentenaufnahme, die durch die Funktionen f (in die Blutbahn gespritzt) und g (Einnahme in Tablettenform) beschrieben werden, hinsichtlich der Wirkdauer des Wirkstoffes.

Fortsetzung Aufgabe 1A

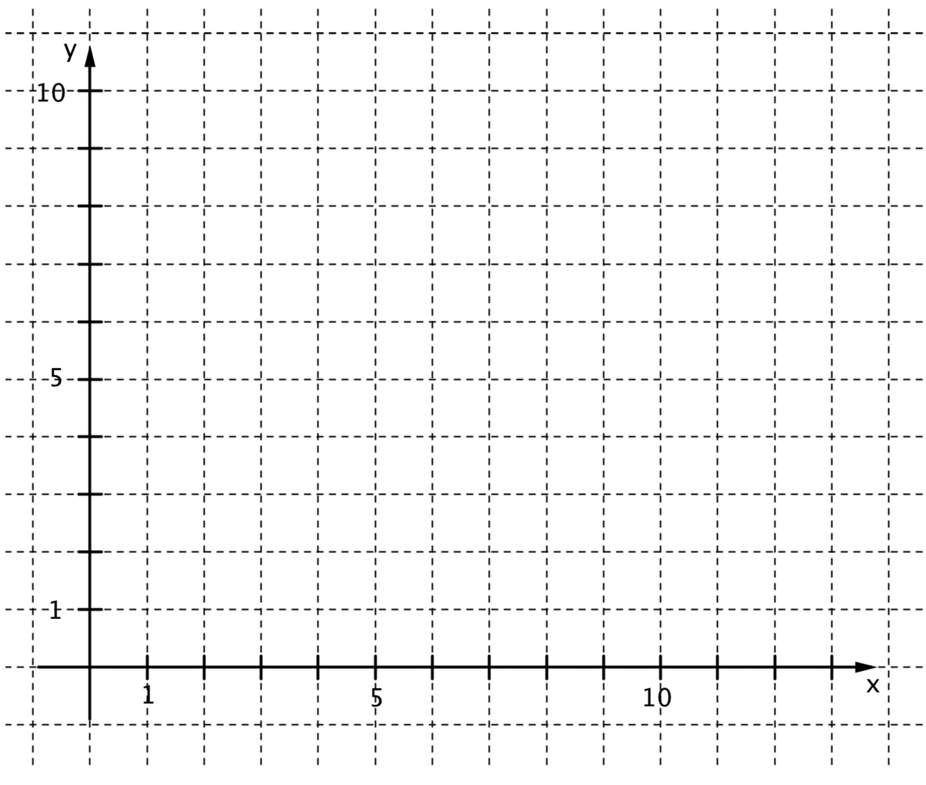
d) Nach der Einnahme der ersten Tablette soll die Konzentration des Wirkstoffes nicht unter $1\frac{\text{mg}}{\ell}$ fallen. Begründen Sie, dass eine zweite Tablette des Medikaments erst zu dem Zeitpunkt eingenommen werden muss, wenn die Konzentration auf $1\frac{\text{mg}}{\ell}$ absinkt.

Die Funktion g gehört zur Funktionenschar g_k mit $g_k(x) = 8 \cdot \left(\frac{0{,}6}{0{,}6-k}\right) \cdot \left(e^{-k\cdot x} - e^{-0{,}6\cdot x}\right)$;

x in Stunden, $g_k(x)$ in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ und $0 < k < 0{,}6$.
Erläutern Sie durch Betrachtung verschiedener Graphen der Schar den Einfluss des Parameters k auf den Zeitpunkt und Wert der höchsten Konzentration sowie auf die Wirkdauer des Wirkstoffes.
Im Folgenden können Sie ohne Nachweis verwenden:
$g_k'(x) = 8 \cdot \left(\frac{0{,}6}{0{,}6-k}\right) \cdot \left(0{,}6 \cdot e^{-0{,}6\cdot x} - k \cdot e^{-k\cdot x}\right)$.
Bestimmen Sie für eine durch g_k modellierte Medikamentenaufnahme den Wert von k so, dass die maximale Konzentration nach drei Stunden erreicht wird.

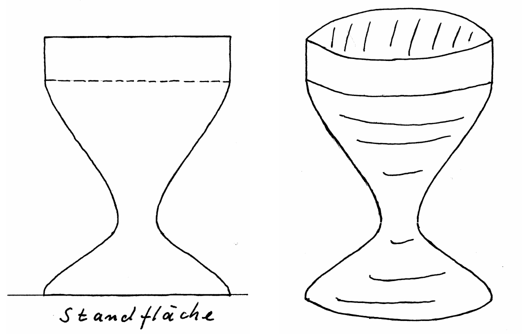
Material

Anlage: Koordinatensystem zu den Teilaufgaben a) und c)



Aufgabe 1B

Ein Designer hat ein rotationssymmetrisches Gefäß entworfen und dazu die nebenstehenden Handskizzen angefertigt.
Um Angaben für die Serienproduktion zu gewinnen, wird das Gefäß vermessen. Man bestimmt die Außenradien der kreisförmigen Querschnitte in verschiedenen Höhen und erhält folgende Tabelle:



Höhe in cm	0	1	2	3	4	5	6	7
Radius in cm	2,5	1,5	0,5	0,8	1,5	2,2	2,5	2,5

a) Ein Vorschlag zur Modellierung der Randkurve ist eine Näherung durch eine ganzrationale Funktion r mit $r(x) = -0{,}0155 \cdot x^4 + 0{,}139 \cdot x^3 - 0{,}077 \cdot x^2 - 1{,}202 \cdot x + 2{,}530$; x: Höhe in Zentimetern, r(x): zugehöriger Radius in Zentimetern.
Zeichnen Sie die zu der Tabelle gehörigen Punkte und skizzieren Sie den Graphen der Funktion r in das Koordinatensystem der Anlage 1.
Bestimmen Sie die Stellen, an denen der durch r modellierte Rand des Gefäßes senkrecht zur Standfläche verläuft.
Begründen Sie anhand der Differenzen zwischen den Tabellenwerten und den jeweiligen Funktionswerten, dass die Funktion r zur Modellierung ungeeignet ist.
Alternativ wird vorgeschlagen, eine ganzrationale Funktion zu wählen, deren Graph durch alle durch die Tabelle gegebenen Punkte verläuft.
Begründen Sie, ohne diese Funktion konkret zu bestimmen, warum der Ansatz über eine Funktion siebten Grades möglich ist.

b) Für eine weitere Modellierung soll der Radius in einer Höhe von 2 cm am kleinsten, der Radius am Fuß (in einer Höhe von 0 cm) und für alle Höhen von 6 cm bis 7 cm am größten sein. Ferner soll für die Ableitung der modellierenden Funktion g gelten: $g'(0) = 0$.
Erläutern Sie die Bedeutung der Bedingung $g'(0) = 0$ im Sachkontext.
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion einer differenzierbaren Funktion, die die angegebenen Bedingungen erfüllt, in das Koordinatensystem der Anlage 2.
Es soll eine Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 1{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ g_2(x) & \text{für } 2 < x < 6 \\ g_3(x) = 2{,}5 & \text{für } 6 \le x \le 7 \end{cases}$$

gewählt werden, wobei g_1 und g_3 die angegebenen Bedingungen erfüllen.
Bestimmen Sie einen Term für eine ganzrationale Funktion g_2, so dass die Funktion g an den Stellen 2 und 6 stetig und differenzierbar ist.
(Zur Kontrolle: $g_2(x) = -0{,}0625 \cdot x^3 + 0{,}75 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 2{,}5$)

Fortsetzung Aufgabe 1B

c) Es wird jetzt der Körper betrachtet, der durch die Rotation des Graphen zu g um die x-Achse entsteht. Dabei wird im oberen Teil (für $x \geq 2$) die Form so ausgefräst, dass die innere Begrenzung durch $g_{innen}(x) = \begin{cases} -0{,}0625 \cdot x^3 + 0{,}75 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 2{,}3 & \text{für } 2 \leq x < 6 \\ 2{,}3 & \text{für } 6 \leq x \leq 7 \end{cases}$

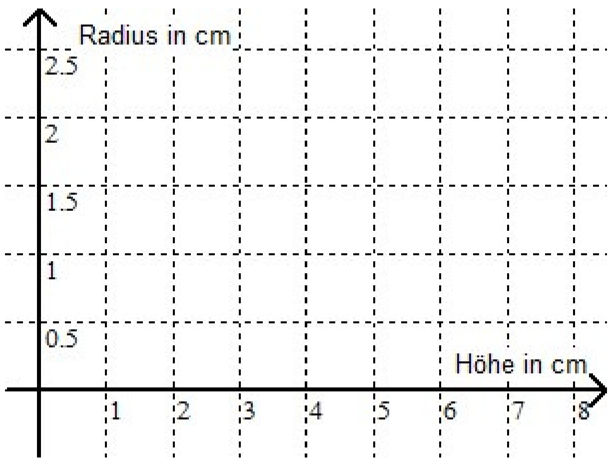
beschrieben wird.
Ein Kubikzentimeter des verwendeten Materials hat eine Masse von 0,7 g. Bestimmen Sie die Masse des so entstehenden Rotationskörpers (für $x \geq 2$).
Unter der Wandbreite soll die Differenz der y-Werte der äußeren und der inneren Begrenzungsfunktion in obiger Modellierung verstanden werden.
Entscheiden Sie ohne neue Berechnung, ob sich die Masse des Rotationskörpers (für $x \geq 2$) verdoppelt, wenn die Wandbreite durch entsprechende Veränderung der Funktion g_{innen} verdoppelt wird.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang werden im Folgenden die Funktionen f_k mit $f_k(x) = \left(x^3 + k \cdot x^2\right) \cdot e^{-x}$, $k \geq 0$, betrachtet.

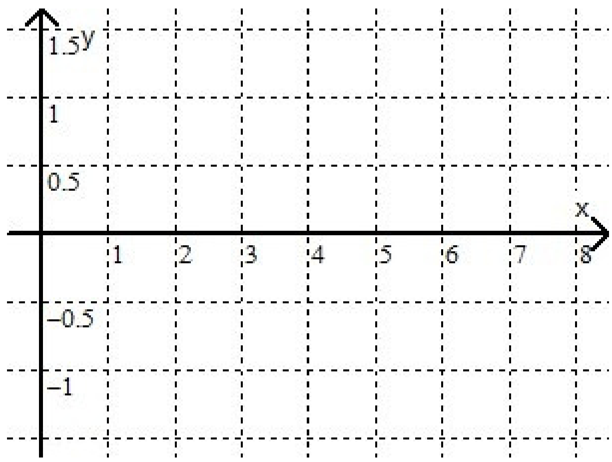
Weisen Sie nach, dass für die Ableitungen f_k' der Funktionen f_k gilt:
$f_k'(x) = \left(-x^3 + (3-k) \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x\right) \cdot e^{-x}$.
Untersuchen Sie den Graphen von f_0 $(k = 0)$ auf die Anzahl der Punkte mit waagerechter Tangente und deren besondere Eigenschaften.
Gegeben sind eine ganzrationale Funktion u und eine Funktion v mit $v(x) = u(x) \cdot e^{-x}$.
Zeigen Sie:
Der Graph von v hat an den Stellen x_h waagerechte Tangenten, für die $u(x_h) = u'(x_h)$ gilt.

Material

Anlage 1:
Koordinatensystem zu Teilaufgabe a)



Anlage 2:
Koordinatensystem zu Teilaufgabe b)



Aufgabe 2A

Für Niedersachsen wurde für alle 61368 Geburten im Jahr 2009 eine Statistik erstellt, die beschreibt, ob das neugeborene Kind das erste, zweite, dritte usw. der Mutter ist.
Für die Altersgruppe der 20 bis 25 Jahre alten Mütter ergeben sich folgende Daten:

Stellung des Neugeborenen	1. Kind	2. Kind	3. Kind	4. Kind	5. Kind und weitere
Anteil der Geburten in %	60	30	9	1	0

Verwenden Sie die relativen Häufigkeiten der Tabelle als Wahrscheinlichkeiten.

a) Hundert dieser Geburten werden zufällig ausgewählt. Beschreiben Sie die Bedeutung der folgenden Gleichung und gehen Sie dabei auf die vorgenommene Modellierung ein:

$$P(X=55)=\binom{100}{55}\cdot 0{,}6^{55}\cdot 0{,}4^{45}.$$

Berechnen Sie mithilfe der obigen Modellierung die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
- E_1: Von 100 Neugeborenen sind mindestens 60 Erstgeborene.
- E_2: Von 100 Neugeborenen sind mehr als 50, aber höchstens 70 Erstgeborene.

Geben Sie Voraussetzungen dafür an, dass hier die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten entsprechen und dass die Verwendung einer binomialverteilten Zufallsgröße zu angemessenen Näherungswerten führt.

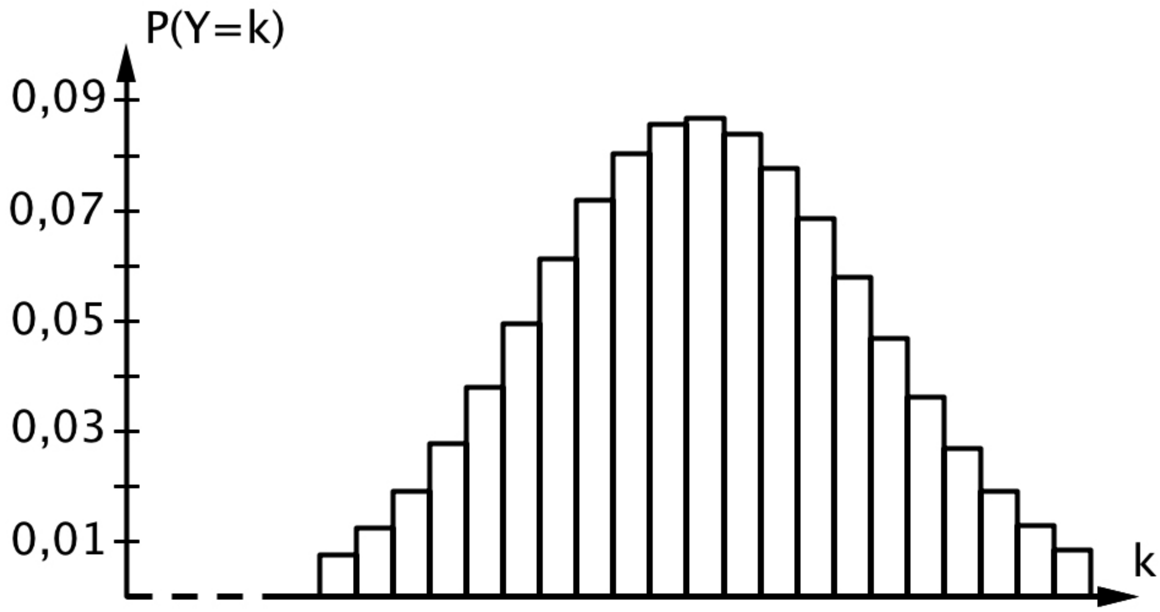
b) Die Grafik in der Anlage stellt einen Ausschnitt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$ dar.
Bestimmen Sie $P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma)$ und stellen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der Grafik dar.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang der oben angegebenen Geburtenstatistik.
Es soll bei 200 zufällig ausgewählten Geburten die Anzahl der drittgeborenen Kinder betrachtet werden. Geben Sie das kleinstmögliche, zur zugehörigen Wahrscheinlichkeit symmetrische Intervall an, in dem die relative Häufigkeit mit einer Sicherheit von mindestens $96\,\%$ liegt.

c) Bei einer Stichprobe von 1000 Geburten aus den im Jahr 2009 in Niedersachsen registrierten Geburten wurden 17 Zwillingsgeburten festgestellt.
Bestimmen Sie für die Geburten im Jahr 2009 ein Vertrauensintervall ($\gamma = 95\,\%$) für den Anteil der Zwillingsgeburten.
Nennen Sie drei grundsätzliche Unterschiede zwischen einem Vertrauensintervall und einem wie in Aufgabenteil b) bestimmten Intervall für die relativen Häufigkeiten.

Fortsetzung Aufgabe 2A

Material

Anlage: Ausschnitt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Teilaufgabe b)



Die Grafik stellt einen Ausschnitt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße Y mit $n = 100$ und $p = 0,3$ dar. Jeder Balken hat die Breite 1.

Aufgabe 2B

Eine Fleischwarenfabrik produziert Wurstpackungen, auf denen ein Inhalt von 200 g angegeben ist. Langfristige Erfahrungen zeigen, dass bei einem genormten Produktions- und Abfüllprozess das Gewicht der Wurstpackungen als eine normalverteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert $\mu = 204{,}6\text{ g}$ und der Standardabweichung $\sigma = 4{,}4\text{ g}$ angesehen werden kann.

a) Wurstpackungen mit einem Gewicht unter 195 g werden nicht verkauft.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Wurstpackung nicht verkauft werden kann. (Zur Kontrolle: $p \approx 0{,}015$)
Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der Wurstpackungen an, die verkauft werden können.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 300 produzierten Wurstpackungen mindestens 293 Packungen verkauft werden können.
Bestimmen Sie die Anzahl der herzustellenden Wurstpackungen, wenn der Erwartungswert für die Anzahl der Wurstpackungen, die verkauft werden können, 1000 betragen soll.

b) Die internen Vorgaben sehen vor, dass höchstens 5 % der Packungen ein Gewicht von mehr als 210 g aufweisen dürfen.
Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nicht eingehalten wird.
Der Abfüllprozess soll so verändert werden, dass sich bei gleich bleibender Standardabweichung von $\sigma = 4{,}4\text{ g}$ der Erwartungswert ändert.
Ermitteln Sie den größten Erwartungswert μ auf 0,1 g genau, für den diese interne Vorgabe erfüllt ist.

c) Der Hersteller liefert die Wurstpackungen in Großeinheiten aus. Aus Erfahrung geht er davon aus, dass bestellte Großeinheiten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 storniert, also nicht abgenommen werden.
Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Bestellung von Großeinheiten durch eine Binomialverteilung modelliert werden kann.
Erläutern Sie, welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, damit eine solche Modellierung angebracht ist.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 100 bestellten Großeinheiten die Produktion von 95 Großeinheiten ausreichend ist, also die notwendige Anzahl ausgeliefert werden kann.
Bestimmen Sie die Anzahl an Großeinheiten, die mindestens produziert werden muss, damit bei einem Eingang von 100 Bestellungen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,5 % die notwendige Anzahl nicht ausgeliefert werden kann.

Aufgabe 3A

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der xz-Ebene.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich die beiden Geraden schneiden.
Untersuchen Sie, ob die Gerade g eine der Koordinatenachsen schneidet.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1, zu der die Geraden g und h parallel sind und die den Punkt $P(1|1|1)$ enthält.

b) Durch drei Punkte $A(2|2|1)$, $B(-2|-2|9)$ und $C(0|1|3)$ ist eine Ebene E_2 gegeben.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E_2.
Untersuchen Sie, ob die Gerade g die Ebene E_2 schneidet.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von E_2 und der yz-Ebene.

c) Gegeben sind für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Punkte $P_t(-1+t\,|\,2+6t\,|\,4+t)$ und $Q_t(-9+4t\,|\,14\,|\,1+2t)$.
Erläutern Sie, dass jeder Punkt P_t auf der Geraden g liegt.
Im Folgenden darf ohne weitere Begründung verwendet werden, dass jeder Punkt Q_t auf der Geraden h liegt.
Bestimmen Sie den Abstand von P_t und Q_t für $t = 2$.
Begründen Sie, dass d mit $d(t) = \sqrt{(3t-8)^2 + (12-6t)^2 + (t-3)^2}$ die Entfernung der Punkte P_t und Q_t angibt.
Ermitteln Sie die kürzeste Entfernung der Punkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass sich die beiden folgenden Aussagen nicht widersprechen:
- Die Geraden g und h schneiden sich.
- Die kürzeste Entfernung der Punkte P_t und Q_t ist größer als null.

Aufgabe 3B

Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,-4\,|\,-2)$, $B(6\,|\,-12\,|\,0)$ und $D(-2\,|\,-4\,|\,4)$
sowie für $k \in \mathbb{R}$ die Punkte $M_k(k\,|\,-4\cdot k\,|\,k)$.
Die Gerade g verläuft durch die Punkte B und D.
Die Geraden h_k verlaufen jeweils durch die Punkte A und M_k.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.
Bestimmen Sie einen Wert für k so, dass die Geraden g und h_k senkrecht zueinander verlaufen.
Zeigen Sie, dass sich für dieses k die beiden Geraden im Punkt M_k schneiden.
Der Punkt C ist der Bildpunkt von A bei einer Spiegelung am Punkt $M_2(2\,|\,-8\,|\,2)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

b) E ist die Ebene, in der die Geraden g und h_2 liegen.

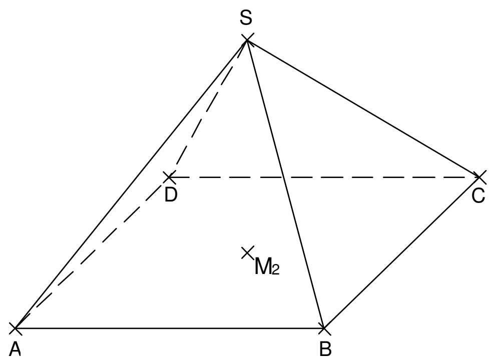
Weisen Sie nach, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine mögliche Gleichung dieser Ebene ist.

Eine zweite Ebene F ist durch die folgende Gleichung gegeben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F.

c) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Quadrats ABCD mit dem Mittelpunkt M_2.
Dieses Quadrat ist die Grundfläche einer Pyramide, bei der alle acht Kanten dieselbe Länge haben.
Berechnen Sie die Höhe der Pyramide.
(Kontrollergebnis: $h = 6$)
Q ist ein beliebiger Punkt der Geraden g durch B und D.
Zeigen Sie, dass jeder Vektor $\overrightarrow{AQ}$ dargestellt werden

kann in der Form: $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Weisen Sie nach, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf jedem Vektor $\overrightarrow{AQ}$ senkrecht steht.

Ermitteln Sie mithilfe des Vektors $\vec{v}$ die Koordinaten eines Punktes S, der als Spitze der Pyramide infrage kommt.