Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (50%)	Block 2 Stochastik (25%)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (25%)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Die Gewichtung der Blöcke ist in Klammern angegeben.

Auswahlzeit: 20 Minuten

Bearbeitungszeit: 220 Minuten

Hilfsmittel

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
4. ggf. Ergänzung zur Formelsammlung – Binomialtabellen (Erlass vom 27.09.2007)

Aufgabe 1A

Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut entscheidend. Im Folgenden wirkt das Medikament nur bei einer Konzentration von mindestens 1 Milligramm pro Liter $\left(\frac{mg}{\ell}\right)$. Es kann entweder direkt in die Blutbahn gespritzt oder als Tablette eingenommen werden.

a) Wenn das Medikament direkt in die Blutbahn gespritzt wird, dann kann die Konzentration des Wirkstoffes im Blut durch die Funktion f mit $f(x) = 8 \cdot e^{-0,4 \cdot x}$ beschrieben werden; x in Stunden und $f(x)$ in $\frac{mg}{\ell}$.
Skizzieren Sie den Graphen von f in das Koordinatensystem der Anlage.
Bestimmen Sie die Konzentration nach sechs Stunden und den Zeitpunkt, ab dem die Konzentration unter $1\,\frac{mg}{\ell}$ gefallen ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen zum Zeitpunkt 0 und zeichnen Sie die Tangente in das Koordinatensystem der Anlage.
Erläutern Sie die Bedeutung der Steigung der Tangente im Sachzusammenhang.

b) In einem anderen Fall wird das Medikament in Tablettenform verabreicht. Hier lässt sich die Konzentration dieses Wirkstoffes im Blut mit folgender Funktion beschreiben:
$g(x) = 24 \cdot \left(e^{-0,4 \cdot x} - e^{-0,6 \cdot x}\right)$; x in Stunden und $g(x)$ in $\frac{mg}{\ell}$.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem der Anlage.
Ermitteln Sie den Wendepunkt und erläutern Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie den Wirkbeginn in Minuten und die Wirkdauer des Medikaments in Stunden.

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist durch die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(x\,|\,0)$ und $C(x\,|\,g(x))$ mit $x > 0$ ein Dreieck gegeben.
Zeigen Sie, dass für $x_M \approx 4{,}111$ der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird, und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
Zeigen Sie, dass die Winkel
- zwischen der Geraden durch die Punkte A und $C_M\left(x_M\,|\,g(x_M)\right)$ und der x-Achse und
- zwischen der Tangente an den Graphen von g an der Stelle x_M und der x-Achse

gleich groß sind.

d) Im Folgenden werden zwei Flächen betrachtet:
- Die Fläche F_1, die durch die y-Achse und die Graphen von f und g eingeschlossen wird.
- Die Fläche F_2, die durch die Graphen von f und g und die Gerade zu $x = 13$ eingeschlossen wird.

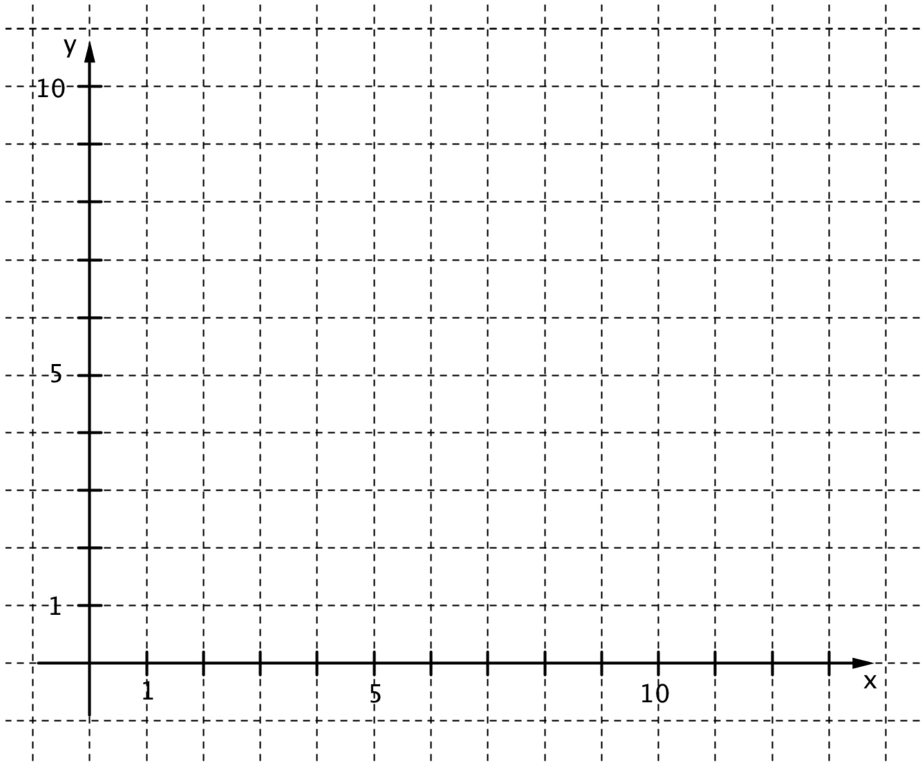
Zeigen Sie, dass die Differenz der beiden Flächeninhalte ca. $0{,}204$ Flächeneinheiten beträgt.
Begründen Sie mithilfe dieses Ergebnisses, ohne erneute Rechnung, dass auch die Inhalte der Flächen
- F_3: zwischen dem Graphen von f und der x-Achse und
- F_4: zwischen dem Graphen von g und der x-Achse

auf dem Intervall $[0;13]$ eine Differenz von ca. $0{,}204$ Flächeneinheiten aufweisen.

Fortsetzung Aufgabe 1A

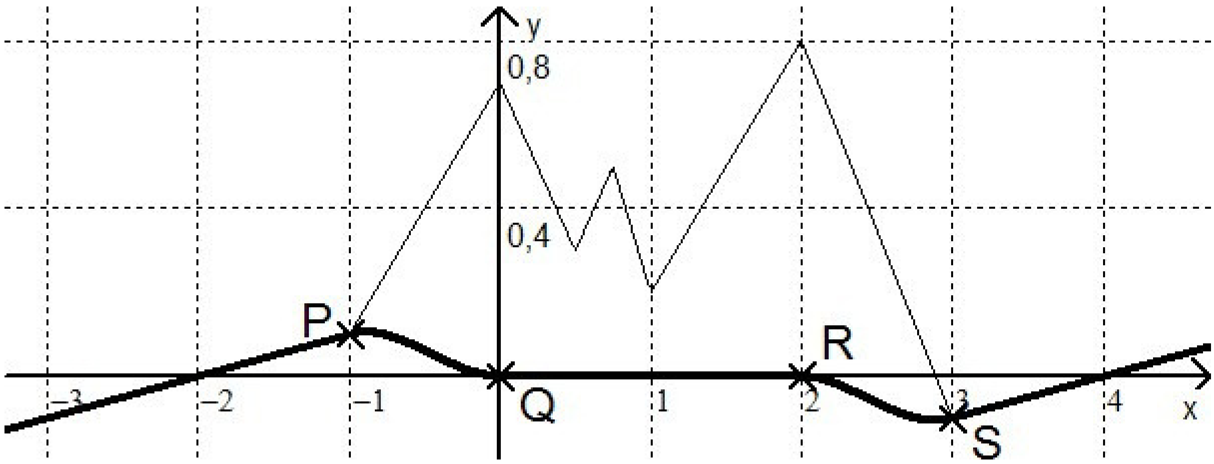
Material

Anlage: Koordinatensystem zu den Teilaufgaben a) und b)



Aufgabe 1B

Das Schaubild zeigt den Querschnitt eines Berges, durch den ein Tunnel gebaut werden soll. Die Punkte P und S stellen dabei die Ein- bzw. Ausfahrt dar. Eine Längeneinheit entspricht jeweils 100 m. Die Anfahrt von links bis zum Punkt $P(-1\,|\,0{,}1)$ wird durch die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}1\cdot x + 0{,}2$ beschrieben, die Ausfahrt ab $S(3\,|\,-0{,}1)$ durch die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}1\cdot x - 0{,}4$.
Die Fahrbahn soll zwischen den Punkten $Q(0\,|\,0)$ und $R(2\,|\,0)$ geradlinig verlaufen.



a) Berechnen Sie den Abstand der Punkte P und S und begründen Sie, dass die tatsächliche Straßenlänge größer sein wird.
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion g dritten Grades, deren Graph die Fahrbahn zwischen den Punkten R und S so modelliert, dass jeweils ein stetiger und differenzierbarer Übergang zu den Anschlussstrecken vorliegt.
(Zur Kontrolle: $g(x) = 0{,}3\cdot x^3 - 2{,}2\cdot x^2 + 5{,}2\cdot x - 4$)

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = 0{,}3\cdot x^3 + k\cdot x^2$.
Bestimmen Sie k so, dass der Graph von f_k durch die Punkte P und Q verläuft.
(Zur Kontrolle: $k = 0{,}4$)
Untersuchen Sie, ob diese Trasse einen geeigneten Fahrbahnverlauf zwischen P und Q darstellt.
Berechnen Sie die Steigung der Strecke $\overline{PQ}$ und den Winkel, den die Strecke $\overline{PQ}$ mit der x-Achse bildet.

c) Das Gefälle der Straße darf an keiner Stelle größer als 20 % sein.
Untersuchen Sie, ob diese Bedingung für den Straßenabschnitt zwischen P und Q erfüllt ist.
Wählt man einen beliebigen Punkt auf dem Graphen von $f_{0,4}$ und spiegelt diesen am Punkt $Z(1\,|\,0)$, so erhält man einen Punkt, der auf dem Graphen von g liegt.
Zeigen Sie dieses am Beispiel des Punktes $A(-0{,}5\,|\,0{,}0625)$ und interpretieren Sie die Aussage hinsichtlich der Steigungswerte des gesamten Straßenverlaufs.

d) Gegeben ist unabhängig vom Sachzusammenhang die Kurvenschar f_k mit
$f_k(x) = 0{,}3\cdot x^3 + k\cdot x^2,\ k > 0,\ x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie k so, dass der Graph von f_k mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 250 FE einschließt. (Zur Kontrolle: $k = 3$)
Entscheiden Sie, ob eine Halbierung von k zu einer Halbierung des Flächeninhalts führt.

Aufgabe 2A

Die Besucher eines Nationalparks melden der Parkverwaltung eine zunehmende Anzahl von Bärensichtungen im Park.

a) In einem zentral gelegenen Tal zählt ein Wildhüter an 20 aufeinander folgenden Tagen von einem Beobachtungsturm aus Bären. In der Tabelle sind die Ergebnisse der Zählung dargestellt.

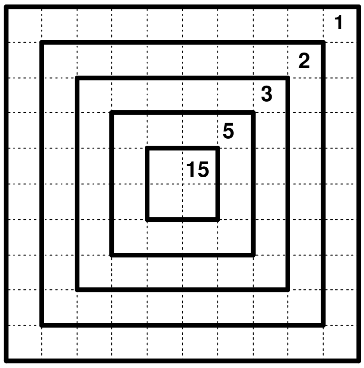
Anzahl der gezählten Bären	0	1	2	3	4	5	mehr als 5
Häufigkeit	2	3	4	6	4	1	0

Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung in einem Histogramm dar.
Bestimmen Sie den Mittelwert $\overline{x}$ und die Standardabweichung s_{20} der Anzahl an gezählten Bären.
Der Wildhüter zählt noch an zwei weiteren Tagen. Mit den beiden zusätzlichen Ergebnissen bleibt der Mittelwert gleich.
Geben Sie begründet alle möglichen Ergebnisse an, die unter dieser Voraussetzung an diesen beiden Tagen aufgetreten sein können.
Durch die zusätzlichen Ergebnisse hat sich die Standardabweichung verändert.
Untersuchen Sie, für welche dieser Ergebnisse die neue Standardabweichung s_{22} kleiner als s_{20} ist.

Um den Bärenbestand im gesamten Park zu ermitteln, werden 200 zufällig angetroffene Bären mit einer Farbmarkierung versehen. Einige Zeit später werden auf einem Satellitenbild des gesamten Parks 150 Bären erkannt, von denen 30 Tiere die Farbmarkierung tragen.

b) Bestimmen Sie die relative Häufigkeit für das Auftreten eines markierten Bären in der Gruppe der auf dem Bild erkannten Bären.
Bestimmen Sie mithilfe dieser relativen Häufigkeit ein Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig angetroffener Bär gekennzeichnet ist ($\gamma = 90\,\%$).
Beschreiben Sie, wie sich aus dem oben bestimmten Vertrauensintervall für p abschätzen lässt, in welchem Intervall die unbekannte Anzahl der Bären im Park liegt, und bestimmen Sie dieses Intervall.

Aufgabe 2B



In einer Spielbude steht ein elektronisches Dartgerät.
Es ist in fünf Felder eingeteilt und so konstruiert, dass auf Knopfdruck ein Wurf simuliert wird, so dass

- jedes der kleinen (gestrichelt dargestellten) Kästchen der quadratischen Scheibe mit derselben Wahrscheinlichkeit getroffen wird,
- jeder Dartwurf die Scheibe innerhalb eines der fünf umrandeten Felder trifft.

Spielregel (Variante A):

- Einsatz pro Wurf: 3 €
- Auszahlung pro Wurf: die auf dem getroffenen Feld stehende Zahl in €

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: Auszahlung in €, deren Werte auf der Scheibe zu sehen sind.
Untersuchen Sie, ob es sich um ein gerechtes Spiel handelt.

Das elektronische Dartgerät lässt sich so einstellen (Variante B), dass nur das innere Feld mit dem Aufdruck „15“ als Treffer (T) und die übrigen Felder als Nieten (N) gelten.
Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Treffer bei 100 Würfen.

b) Begründen Sie, dass diese Zufallsgröße binomialverteilt ist.
Berechnen Sie
- die Wahrscheinlichkeit, genau 8 Treffer zu erzielen,
- die Wahrscheinlichkeit, mindestens 8 Treffer zu erzielen,
- den Erwartungswert $E(Y)$ und die Standardabweichung σ.

c) Die Zufallsgröße Z beschreibt die Summe der Punkte, die bei Variante A mit genau 3 Würfen erreicht werden kann.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 9)$.

Aufgabe 3A

Eine Tischlerei stellt zwei unterschiedliche Schranktypen E_1 und E_2 her. Die Schränke werden aus verschiedenen Modulen M_1, M_2 und M_3 zusammengestellt. Zur Herstellung der Module werden zwei verschiedene Rohstoffe R_1 und R_2 benötigt.
Die Tabellen geben an, wie viele Mengeneinheiten (ME) in jeder Fertigungsstufe für je eine ME der Module beziehungsweise Schranktypen benötigt werden.

Vom Rohstoff zum Modul	M_1	M_2	M_3
R_1	8	4	10
R_2	2	0	6

Vom Modul zum Schranktyp	E_1	E_2
M_1	4	3
M_2	1	5
M_3	3	2

a) Skizzieren Sie ein vollständiges Verflechtungsdiagramm für diesen Produktionsvorgang.
Bestimmen Sie, wie viele ME von R_2 für die Herstellung einer ME von E_2 benötigt werden.
Ein Kunde bestellt 25 ME von E_1 und 50 ME von E_2. Ermitteln Sie die benötigten ME für die Module M_1, M_2 und M_3.

b) Vom Endprodukt E_2 werden doppelt so viele ME wie von E_1 hergestellt. Die Endprodukte können nur in ganzen ME gefertigt werden.
Ermitteln Sie, wie viele ME von E_1 und E_2 höchstens hergestellt werden können, wenn im Lager noch 2150 ME von R_1 und 820 ME von R_2 zur Verfügung stehen.
Im Folgenden kann davon ausgegangen werden, dass genügend Rohstoffe und Module zur Verfügung stehen. Für eine Bestellung sind 50 ME von E_1 und 100 ME von E_2 und zusätzlich 100 ME von M_1 und je 150 ME von M_2 und M_3 zu liefern.
Ermitteln Sie die Rohstoffkosten, wenn eine ME von R_1 zwei Euro kostet und eine ME von R_2 drei Euro kostet.

Aufgabe 3B

In der xy-Ebene sind die Punkte $A(6\,|\,9\,|\,0)$, $B(2\,|\,6\,|\,0)$, $C(5\,|\,2\,|\,0)$ und $D(9\,|\,5\,|\,0)$ gegeben ($1\,\text{Einheit} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$).

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Quadrat handelt.
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer 9 m hohen Pyramide, bei der die Spitze S senkrecht zur Grundfläche über dem Diagonalenschnittpunkt liegt.
Zeigen Sie, dass gilt: $S(5{,}5\,|\,5{,}5\,|\,9)$.
Zeichnen Sie den Punkt S und die Pyramide in das Koordinatensystem der Anlage.

b) Die Sonne scheint auf die Pyramide, die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Untersuchen Sie, ob der Schattenpunkt der Pyramidenspitze S auf einer Mauer sichtbar ist, die durch die Punkte $M_1(5\,|\,0\,|\,0)$, $M_2(15\,|\,0\,|\,0)$, $M_3(15\,|\,0\,|\,3)$ und $M_4(5\,|\,0\,|\,3)$ begrenzt wird.
Einige Sonnenstrahlen treffen ungehindert auf den Boden.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels α, unter dem die Sonnenstrahlen auf den Boden treffen.

Material

Anlage: Koordinatensystem zu Teilaufgabe a)